目录

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变　可以为B是矩阵A与B等价的

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变　可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变　可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

理由：

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变 可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

理由：A经过初等行变 为B，则A与B等价；

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变 可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

理由：A经过初等行变 为B，则A与B等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 .

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A;B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变 可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

理由：A经过初等行变 为B，则A与B等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 .例如，

$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ 与$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ 等价，但A经过初等行变 得不到B.

自测题第五章难点解答

1.原题：设$A; B$是两个同阶矩阵，则A经过初等行变 可以为B是矩阵A与B等价的

解 充分但非必要条件

理由：A经过初等行变 为B，则A与B等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 . 例如，

$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ 与$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ 等价，但A经过初等行变 得不到B.

2.原题：设$A; P$均是3阶方阵， P是以 $_1;\ _2;\ _3$为列向量的矩阵，即，$P = (\ _1\ \ _2\ \ _3)$，P^T为P的转置矩阵，$P^{\ 1}$是P的逆矩阵，记$Q = (\ _1 +\ _2\ \ _2\ \ _3)$，

自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

理由：

自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

理由：因为$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T \quad P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^TAP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

$$(2)Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$(1) Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^TAP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

$$(2)Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

3.原题：

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$有特征向量 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(1)则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$; (2) 对应的特征值 $=$

自测题第五章难点解答

3.原题：

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$有特征向量 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

(1)则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$； (2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$； (2) $= 1.$

自测题第五章难点解答

3.原题：

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$有特征向量 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

(1)则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$；(2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2) $= 1.$

理由：

自测题第五章难点解答

3.原题：设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\5&a&3\\1&b&2\end{pmatrix}$有特征向量 $=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

(1)则 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$；(2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$；(2) $=1.$

理由：$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

自测题第五章难点解答 ！

自测题第五章难点解答

$$=\begin{pmatrix}1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

自测题第五章难点解答

$$=\begin{pmatrix}1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a=\ 1;\ 1+b=1;\ \ =\ 1$，

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a = \quad 1;\ 1+b = 1; \quad = \quad 1$,

所以（1）$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$；（2）$= \quad 1.$

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a = 1;\ 1+b = 1;\ = 1$，

所以 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2) $= 1.$

4.原题： 设A为3阶方阵，矩阵A对应特征值$2;\ 2;1$的特征向量分别是 $_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ _2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ _3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则$A =$

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + a \\ 1 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2 + a = \quad 1;\ 1 + b = 1; \quad = \quad 1,$

所以 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2) $\quad = \quad 1.$

4.原题：设A为3阶方阵，矩阵A对应特征值$2;\quad 2; 1$的特征向量分别是 $_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ _2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ _3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则$A =$

解 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

自测题第五章难点解答

理由：

自测题第五章难点解答

理由：取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

自测题第五章难点解答

理由： 取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

自测题第五章难点解答

理由： 取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

理由： 取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P\ ^{1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\ 2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\ 2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P\ ^{1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\ 2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\\ 1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\\ 1&1&1\\4&0&2\end{pmatrix}.$$

自测题第五章难点解答

理由： 取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&1\\4&0&2\end{pmatrix}.$$

5.原题： 设A是2阶方阵，α_1, α_2是线性无关的2维向量，$A\alpha_1=0$，

(1)若$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则矩阵$A$相似于；

(2)若$A\alpha_2=2\alpha_1+2\alpha_2$，则矩阵$A$相似于

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由： 因为 ${}_1$; ${}_2$线性无关，所以$2\ {}_1 + \ {}_2$; ${}_1 + \ {}_2$都是非零向量，

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为 $_1;\ _2$线性无关，所以$2\ _1+\ _2;\ _1+\ _2$都是非零向量，

(1) $A(2\ _1+\ _2)$

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为 $_1$; $_2$线性无关，所以$2\ _1 + \ _2$; $_1 + \ _2$都是非零向量，

(1) $A(2\ _1 + \ _2) = 2A\ _1 + A\ _2 = 2\ _1 + \ _2$，所以$2\ _1 + \ _2$是属于特征值1的特征向量，

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为 ${}_1$; ${}_2$线性无关，所以$2\ {}_1 + \ {}_2$; ${}_1 + \ {}_2$都是非零向量，

(1) $A(2\ {}_1 + \ {}_2) = 2A\ {}_1 + A\ {}_2 = 2\ {}_1 + \ {}_2$，所以$2\ {}_1 + \ {}_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$; (2) $\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$.

理由： 因为 $_1;\ _2$线性无关，所以$2\ _1 + \ _2;\ _1 + \ _2$都是非零向量，

(1) $A(2\ _1 + \ _2) = 2A\ _1 + A\ _2 = 2\ _1 + \ _2$，所以$2\ _1 + \ _2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值$0$和$1$，相似于对角阵.

(2) $A(\ _1 + \ _2)$

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由： 因为 ${}_1$; ${}_2$线性无关，所以$2\ {}_1 + {}_2$; ${}_1 + {}_2$都是非零向量，

(1) $A(2\ {}_1 + {}_2) = 2A\ {}_1 + A\ {}_2 = 2\ {}_1 + {}_2$，所以$2\ {}_1 + {}_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A({}_1 + {}_2) = A\ {}_1 + A\ {}_2 = 2({}_1 + {}_2)$，所以 ${}_1 + {}_2$是属于特征值

自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由： 因为 $_1;\ _2$线性无关，所以$2\ _1+\ _2;\ _1+\ _2$都是非零向量，

(1) $A(2\ _1+\ _2)=2A\ _1+A\ _2=2\ _1+\ _2$，所以$2\ _1+\ _2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\ _1+\ _2)=A\ _1+A\ _2=2(\ _1+\ _2)$，所以$\ _1+\ _2$是属于特征值2的特征向量，即$A$有特征值0和2，相似于对角阵.

自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：

自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP = B$，

自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP = B$,

$$(1)P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=B-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$r(B-I)=1$，而相似矩阵有相同的秩，所以$r(A-I)=2$；

自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP=B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=B-I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$r(B-I)=1$，而相似矩阵有相同的秩，所以$r(A-I)=2$；

(2)$P^{-1}(A+I)P=P^{-1}AP+P^{-1}IP=B+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

自测题第五章难点解答

相似具有传递性，所以$A+I$相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\ _1;\ \ _2;\ \ _3$是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1; 1; 2$的特征向量，若 $\ ^T_1\ \ _1 = \ ^T_2\ \ _2 = 2;\ \ ^T_3\ \ _3 = 3$，记$P$是以 $\ _1;\ \ _2;\ \ _3$为列的矩阵，即，$P = (\ _1\ \ \ _2\ \ \ _3)$，则$P^TAP =$

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $_1;\ _2;\ _3$是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1;1;2$的特征向量，若 ${}^T_1\ {}_1 = {}^T_2\ {}_2 = 2;\ {}^T_3\ {}_3 = 3$，记$P$是以 $_1;\ _2;\ _3$为列的矩阵，即，$P = (\ _1\ \ _2\ \ _3)$，则$P^TAP =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $_1;\ _2;\ _3$是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1;1;2$的特征向量，若 $^T_1\ _1 = \ ^T_2\ _2 = 2;\ ^T_3\ _3 = 3$，记$P$是以 $_1;\ _2;\ _3$为列的矩阵，即，$P = (\ _1\ \ _2\ \ _3)$，则$P^TAP =$

0 1

$2 \quad 0 \quad 0$

B C

解 @ $0 \quad 2 \quad 0$ A . T

[redacted]

自测题第五章难点解答

7.原题：设 ${}_1; {}_2; {}_3$是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1;1;2$的特征向量，若 ${}^T_1 {}_1 = {}^T_2 {}_2 = 2; {}^T_3 {}_3 = 3$，记$P$是以 ${}_1; {}_2; {}_3$为列的矩阵，即，$P = ({}_1 \quad {}_2 \quad {}_3)$，则$P^TAP =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为 ${}_1; {}_2; {}_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $_1;\ _2;\ _3$是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1;1;2$的特征向量，若 $^T_1\ _1 = {}^T_2\ _2 = 2;\ {}^T_3\ _3 = 3$，记$P$是以 $_1;\ _2;\ _3$为列的矩阵，即，$P = (\ _1\ \ _2\ \ _3)$，则$P^TAP =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为 $_1;\ _2;\ _3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$^T_k\ _l = 0;\ k \neq l$.

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1;1;2$的特征向量，若 $\alpha_1^T\alpha_1 = \alpha_2^T\alpha_2 = 2;\ \alpha_3^T\alpha_3 = 3$，记$P$是以 $\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3$为列的矩阵，即，$P = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，则$P^TAP =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由： 因为 $\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$\alpha_k^T\alpha_l = 0;\ k \neq l$.

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$$

自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 $1,1,2$的特征向量，若 $\alpha_1^T\alpha_1=\alpha_2^T\alpha_2=2, \alpha_3^T\alpha_3=3$，记$P$是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列的矩阵，即，$P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$\alpha_k^T\alpha_l=0, k\neq l$.

$$P^TAP=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}(A\alpha_1\ A\alpha_2\ A\alpha_3)$$

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} {}^{T}_{1} \\ {}^{T}_{2} \\ {}^{T}_{3} \end{pmatrix} (\quad {}_{1} \quad {}_{2} \; 2 \; {}_{3}) = \begin{pmatrix} {}^{T}_{1} \; {}_{1} & {}^{T}_{1} \; {}_{2} & 2 \; {}^{T}_{1} \; {}_{3} \\ {}^{T}_{2} \; {}_{1} & {}^{T}_{2} \; {}_{2} & 2 \; {}^{T}_{2} \; {}_{3} \\ {}^{T}_{3} \; {}_{1} & {}^{T}_{3} \; {}_{2} & 2 \; {}^{T}_{3} \; {}_{3} \end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$
=\begin{pmatrix} {}_1^T \\ {}_2^T \\ {}_3^T \end{pmatrix}\left({}_1 \quad {}_2 \quad 2\,{}_3 \right)=\begin{pmatrix} {}_1^T\,{}_1 & {}_1^T\,{}_2 & 2\,{}_1^T\,{}_3 \\ {}_2^T\,{}_1 & {}_2^T\,{}_2 & 2\,{}_2^T\,{}_3 \\ {}_3^T\,{}_1 & {}_3^T\,{}_2 & 2\,{}_3^T\,{}_3 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.
$$

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} {}^{T}_{1} \\ {}^{T}_{2} \\ {}^{T}_{3} \end{pmatrix} \left({}_{1} \quad {}_{2} \quad 2\,{}_{3} \right) = \begin{pmatrix} {}^{T}_{1}\,{}_{1} & {}^{T}_{1}\,{}_{2} & 2\,{}^{T}_{1}\,{}_{3} \\ {}^{T}_{2}\,{}_{1} & {}^{T}_{2}\,{}_{2} & 2\,{}^{T}_{2}\,{}_{3} \\ {}^{T}_{3}\,{}_{1} & {}^{T}_{3}\,{}_{2} & 2\,{}^{T}_{3}\,{}_{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.原题： 设A是一个方阵，若$A^2 = I$，则称A是对合矩阵.

(1)设B是一个实对合阵，则B是对称阵是B是正交阵的；

(2)设B是一个实对称阵，则B是对合阵是B是正交阵的；

(3)设B是一个正交矩阵，则B是对称阵是B是对合矩阵的；

自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} {}^{T}_{1} \\ {}^{T}_{2} \\ {}^{T}_{3} \end{pmatrix} (\quad {}_1 \quad {}_2 \; 2 \; {}_3) = \begin{pmatrix} {}^{T}_{1}\,{}_1 & {}^{T}_{1}\,{}_2 & 2\,{}^{T}_{1}\,{}_3 \\ {}^{T}_{2}\,{}_1 & {}^{T}_{2}\,{}_2 & 2\,{}^{T}_{2}\,{}_3 \\ {}^{T}_{3}\,{}_1 & {}^{T}_{3}\,{}_2 & 2\,{}^{T}_{3}\,{}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.原题： 设A是一个方阵，若$A^2 = I$，则称A是对合矩阵.

(1)设B是一个实对合阵，则B是对称阵是B是正交阵的；

(2)设B是一个实对称阵，则B是对合阵是B是正交阵的；

(3)设B是一个正交矩阵，则B是对称阵是B是对合矩阵的；

解 (1)充分必要条件；(2)充分必要条件；(3)充分必要条件.

自测题第五章难点解答

理由：

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$,

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$，

若B是对称矩阵，则$B = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，B是正交阵；

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$，

若B是对称矩阵，则$B = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，B是正交阵；

若B是正交矩阵，则$B^{-1} = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B^T = B$，B是对称阵；

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$，

若B是对称矩阵，则$B = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，B是正交阵；

若B是正交矩阵，则$B^{-1} = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B^T = B$，B是对称阵；

(2)B是实对称矩阵，$B^T = B$，

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$，

若B是对称矩阵，则$B = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，B是正交阵；

若B是正交矩阵，则$B^{-1} = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B^T = B$，B是对称阵；

(2)B是实对称矩阵，$B^T = B$，

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，所以B是正交阵；

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2 = I$，

若B是对称矩阵，则$B = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，B是正交阵；

若B是正交矩阵，则$B^{-1} = B^T$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B^T = B$，B是对称阵；

(2)B是实对称矩阵，$B^T = B$，

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，所以B是正交阵；

若B是正交阵，则$BB^T = I$，从而$B^2 = BB^T = I$，所以B是对合阵；

(3)B是正交阵，$BB^T = I$，

自测题第五章难点解答

理由：(1)B是实对合矩阵，$B^2=I$，

若B是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，B是正交阵；

若B是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，B是对称阵；

(2)B是实对称矩阵，$B^T=B$，

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，所以B是正交阵；

若B是正交阵，则$BB^T=I$，从而$B^2=BB^T=I$，所以B是对合阵；

(3)B是正交阵，$BB^T=I$，

若B是对称阵，则$B=B^T$，从而$B^2=BB^T=I$，所以B是对合阵；

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以B是对称阵.

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2+A=0$，若矩阵A的秩$r(A)=2$，则A相似于

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵， 满足$A^2 + A = 0$，若矩阵A的秩$r(A) = 2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2 + A = 0$，若矩阵A的秩$r(A) = 2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2 + A = 0$，若矩阵A的秩$r(A) = 2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵， 满足$A^2+A=0$，若矩阵A的秩$r(A)=2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P$

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2 + A = 0$，若矩阵A的秩$r(A) = 2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，从而$P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP$

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2 + A = 0$，若矩阵A的秩$r(A) = 2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，从而$P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B$，

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵， 满足$A^2+A=0$，若矩阵A的秩$r(A)=2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

即，与矩阵A相似的矩阵B也满足$B^2+B=0$，再，相似矩阵有相同的秩，所以B的秩为2，

自测题第五章难点解答

若B是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以B是对称阵.

9.原题：设A是3阶实对称矩阵，满足$A^2+A=0$，若矩阵A的秩$r(A)=2$，则A相似于

解 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

理由：假设A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

即，与矩阵A相似的矩阵B也满足$B^2+B=0$，再，相似矩阵有相同的秩，所以B的秩为2，在所给的矩阵中，只有此矩阵满足秩为2，$B^2+B=0$.

自测题第五章难点解答

10.原题： 3维实向量X_0与$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$解向量的

自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量X_0与 $_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量X_0与 $_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：

自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量X_0与 ${}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：向量$X_0 = \begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$与向量$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$正交的充分必要条件是

$X_0 = \begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$是齐次方程$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$的解.

自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量X_0与 $_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：向量$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$与向量$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$正交的充分必要条件是 $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$是齐次方程$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$的解.

所以X_0满足齐次线性方程，一定与 $_1$正交，但与 $_1$正交，不一定满足方程组中第二个方程.

自测题第五章难点解答

11.原题：设3阶实对称矩阵A的秩$r(A)=2$，满足

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$，若取$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，并作可逆

线性变 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

则将二次型$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为标准形

自测题第五章难点解答

11.原题：设3阶实对称矩阵A的秩$r(A)=2$，满足

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}，若取C=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}，并作可逆$$

线性变 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

则将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为标准形

解 $2y_1^2+2y_3^2$.

自测题第五章难点解答

理由：

自测题第五章难点解答

理由： 因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

理由：因为$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

所以A有特征值$-1, 1$，属于它们的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

又因为A的秩$r(A)=2$，所以A有0特征值，

自测题第五章难点解答

理由：因为$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以A有特征值$-1; 1$，属于它们的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

又因为A的秩$r(A) = 2$，所以A有0特征值，而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，

自测题第五章难点解答

理由：因为$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\ldots$ ，$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以

$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以A有特征值 $-1;1$， 属于它们的特征向量分别是

$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

又因为A的秩$r(A)=2$，所以A有0特征值，而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，

所以，

自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与 $\begin{matrix} 0 \\ B \end{matrix}$

自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与 $\begin{matrix} 0 \\ B \end{matrix}$

自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

所以$AC = \begin{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

所以$AC=\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

所以$C^TAC=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,

所以所 标准形为 $2y_1^2+2y_3^2$.

自测题第五章难点解答

12.原题：设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3，

$$_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad _2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 是齐次线性方程组$AX = 0$的两个解

向量，取$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则$C^TAC =$

自测题第五章难点解答

12.原题：设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3，$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组$AX = 0$的两个解向量，取$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则$C^TAC =$

解 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

自测题第五章难点解答

理由：

自测题第五章难点解答

理由：因为$AX=0$有解 $_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，属于0特征值有两个线性无关的特征向量

$_1$; $_2$，

自测题第五章难点解答

理由： 因为$AX=0$有解 ${}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ${}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，属于0特征值有两个线性无关的特征向量 ${}_1$; ${}_2$，又因为A的各行元素之和相等，为3，

自测题第五章难点解答

理由：因为$AX=0$有解 $_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$；$_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值， 属于0特征值有两个线性无关的特征向量 $_1$； $_2$，又因为A的各行元素之和相等，为3，所以A有特征值3，属于特征值3的特征向量为 $_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

自测题第五章难□□□□□第□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

自测题第五章难点解答

理由： 因为$AX=0$有解 ${}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; ${}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值， 属于0特征值有两个线性无关的特征向量 ${}_1$; ${}_2$，又因为A的各行元素之和相等，为3，所以A有特征值3，属于特征值3的特征向量为 ${}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，将特征向量正交 和单位 ，得矩阵$A$属于特征值0的正交单位向量 $\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$， ${}_3$单位 得 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $C^TAC=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com