



# 目录

① 第1节

② 第2节

③ 第3节

④ 第4节



## 自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的



## 自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

解 充分但非必要条件



## 自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

解 充分但非必要条件

理由：



## 自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

解 充分但非必要条件

理由： $A$ 经过初等行变为 $B$ ，则 $A$ 与 $B$ 等价；



## 自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

解 充分但非必要条件

理由： $A$ 经过初等行变为 $B$ ，则 $A$ 与 $B$ 等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 .



## 自测题第五章难点解答

**1. 原题：**设 $A, B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

**解 充分但非必要条件**

**理由：** $A$ 经过初等行变为 $B$ ，则 $A$ 与 $B$ 等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 例如，

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  等价，但 $A$ 经过初等行变 得不到 $B$ .



## 自测题第五章难点解答

**1. 原题：**设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 $A$ 经过初等行变 可以为 $B$ 是矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的

**解 充分但非必要条件**

**理由：** $A$ 经过初等行变为 $B$ ，则 $A$ 与 $B$ 等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 例如，

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  等价，但 $A$ 经过初等行变 得不到 $B$ 。

**2. 原题：**设 $A; P$ 均是3阶方阵， $P$ 是以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为列向量的矩阵，即， $P = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ ， $P^T$ 为 $P$ 的转置矩阵， $P^{-1}$ 是 $P$ 的逆矩阵，记 $Q = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ ，



# 自测题第五章难点解答

(1) 若  $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $Q^T A Q =$ ;

(2) 若  $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $Q^{-1} A Q =$ ;

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$(1) \text{ 若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q =;$$

$$(2) \text{ 若 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}AQ =;$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & 0 & 2 \\ \textcircled{O} & 2 & 1 & 0 & \textcircled{O} & 1 & 0 & 1 \\ \textcircled{B} & 1 & 1 & 0 & \textcircled{A} & 0 & 1 & 0 \\ \text{解 } (1) @1 & (2) @0 & & & & & \end{array}$$

解 (1) @ $\begin{matrix} B \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ ; (2) @ $\begin{matrix} B \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ .

# 自测题第五章难点解答

$$(1) \text{ 若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q =;$$

$$(2) \text{ 若 } P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1} A Q =;$$

解 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

理由：

# 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 0 & & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(1) 若  $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $Q^T A Q =$ ;

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(2) 若  $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $Q^{-1} A Q =$ ;

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

解 (1)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; (2)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**理由:** 因为  $Q = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 所以

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_T P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} A P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_T P^T A P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} A P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_T P^T A P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} A P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# 自测题第五章难点解答

3. 原题：

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{pmatrix}$  有特征向量  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

(1) 则  $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} =$ ; (2) 对应的特征值  $=$

## 自测题第五章难点解答

3. 原题：

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{pmatrix} \text{ 有特征向量 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(1) \text{ 则 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} =; (2) \text{ 对应的特征值 } =$$

$$\text{解 (1)} \quad \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}; (2) = 1.$$

# 自测题第五章难点解答

3. 原题：

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{pmatrix} \text{ 有特征向量 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(1) \text{ 则 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} =; (2) \text{ 对应的特征值 } =$$

$$\text{解 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; (2) = 1.$$

理由：

## 自测题第五章难点解答

3. 原题：

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{pmatrix}$  有特征向量  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

(1) 则  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} =$ ; (2) 对应的特征值 =

解 (1)  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; (2) = 1.

理由： $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

1

# 自测题第五章难点解答

！



# 自测题第五章难点解答

$$= \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & 1 \\ @2 + a\textcircled{C} \end{matrix} = \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & 1 \\ @1 \textcircled{C} \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 1+b & 1 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & 1 \\ \textcircled{C} & \end{matrix} @ 2 + a \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & 1 \\ \textcircled{C} & \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 1 + b & 1 \\ & \end{matrix}$$

比较两边，既得， $2 + a = -1$ ;  $1 + b = 1$ ;  $= -1$ ,



# 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} @ 2 + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} @ 1 = \begin{pmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得， $2+a = -1$ ;  $1+b = 1$ ;  $= 1$ ,

所以 (1)  $\frac{a}{b} = \frac{3}{0}$ ; (2)  $= 1$ .



## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{matrix} B \\ @2 \end{matrix} + a \begin{matrix} C \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ @1 \end{matrix} \begin{matrix} C \\ A \end{matrix},$$

$$1 + b \quad 1$$

比较两边，既得， $2+a=1$ ;  $1+b=1$ ;  $=1$ ,

$$\text{所以 (1) } \frac{a}{b} = \frac{3}{0}; \text{ (2) } = 1.$$

4. 原题：设 $A$ 为3阶方阵，矩阵 $A$ 对应特征值2; -2; 1的特征

向量分别是  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A =$

$$1 \qquad \qquad 1 \qquad \qquad 0$$



# 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} @ 2 + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} @ 1 = \begin{pmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得， $2+a=-1$ ;  $1+b=1$ ;  $=-1$ ,

$$\text{所以 (1) } \frac{a}{b} = \frac{3}{0}; \text{ (2) } = -1.$$

**4. 原题：**设 $A$ 为3阶方阵，矩阵 $A$ 对应特征值 $2; -2; 1$ 的特征

向量分别是  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则 $A=$

$$\text{解 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



## 自测题第五章难点解答

理由：



## 自测题第五章难点解答

理由：取  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,



# 自测题第五章难点解答

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**理由：**取  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**理由：**取  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

理由：取  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 原题：设  $A$  是 2 阶方阵， $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  是线性无关的 2 维向量，

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

(1) 若  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 则矩阵  $A$  相似于；

(2) 若  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 则矩阵  $A$  相似于

# 自测题第五章难点解答

解 (1)  $\begin{matrix} & 1 \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & ; \end{matrix}$  (2)  $\begin{matrix} & 1 \\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & . \end{matrix}$



## 自测题第五章难点解答

解 (1)  $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad ; \quad (2) \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ .

理由：

## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ (2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  线性无关，所以  $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  都是非零向量，



## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  线性无关，所以  $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$  都是非零向量，

$$(1) A(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  线性无关，所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  都是非零向量，

(1)  $A(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , 所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  是属于特征值1的特征向量，



## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  线性无关，所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  都是非零向量，

(1)  $A(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , 所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  是属于特征值1的特征向量，即  $A$  有特征值0和1，相似于对角阵.



## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  线性无关，所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  都是非零向量，

(1)  $A(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , 所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  是属于特征值1的特征向量，即  $A$  有特征值0和1，相似于对角阵.

$$(2) A(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$$



## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由：**因为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  线性无关，所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  都是非零向量，

(1)  $A(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , 所以  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  是属于特征值1的特征向量，即  $A$  有特征值0和1，相类似于对角阵。

(2)  $A(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = A\vec{e}_1 + A2\vec{e}_2 = 2(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$ , 所以  $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  是属于特征值

## 自测题第五章难点解答

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**理由:** 因为  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  线性无关, 所以  $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$  都是非零向量,

(1)  $A(2_1 + 2_2) = 2A_1 + A_2 = 2_1 + 2_2$ , 所以 $2_1 + 2_2$ 是属于特征值1的特征向量, 即A有特征值0和1, 相似于对角阵.

(2)  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ , 所以  $\alpha_1 + \alpha_2$  是属于特征值2的特征向量, 即A有特征值0和2, 相似于对角阵.



- 1

1 - 2 - 1 - 2

- 1 - 2

1 - 2 - 1 - 2

- 1 - 2





## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & \textcircled{O} & & 1 \\ & 2 & 0 & 0 \\ \text{解 } (1) & \textcircled{1}; & (2) & \textcircled{B} @ 0 & 2 & 0 \textcircled{C}. \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

理由：



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

解 (1)1; (2) @ 0 2 0 A.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

理由：因为 $A$ 与 $B$ 相似，所以存在可逆矩阵 $P$ ，使得

$$P^{-1}AP = B,$$



## 自测题第五章难点解答

$$\textcircled{O} \begin{matrix} & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & 1 \end{matrix}$$

解 (1) 1; (2)  $\textcircled{B} @ \begin{matrix} & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & & \textcircled{C} \end{matrix}$ .

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**理由:** 因为  $A$  与  $B$  相似, 所以存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$\textcircled{O} \quad (1) P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP \quad P^{-1}I P = B - I =$$

$$\textcircled{B} @ \begin{matrix} & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \textcircled{C},$$

$$\begin{matrix} & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$\textcircled{O} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \textcircled{1}$$

解 (1) 1; (2)  $\textcircled{B} @ \textcircled{0} \textcircled{C}$ .

**理由:** 因为  $A$  与  $B$  相似, 所以存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$\textcircled{O} \quad (1) P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP \quad P^{-1}I P = B - I =$$

$\textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \textcircled{C}$ ,  $r(B - I) = 1$ , 而相似矩阵有相同的秩, 所

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

以  $r(A - I) = 2$ ;



## 自测题第五章难点解答

$$\textcircled{O} \begin{matrix} & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ & & \end{matrix}$$

解 (1) 1; (2)  $\textcircled{B} @ \begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & & \end{matrix} \textcircled{C}$ .

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{matrix}$$

**理由:** 因为  $A$  与  $B$  相似, 所以存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$\textcircled{O} \quad (1) P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP \quad P^{-1}I P = B - I =$$

$$\textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \textcircled{C}, \quad r(B - I) = 1, \quad \text{而相似矩阵有相同的秩, 所}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ & & \end{matrix}$$

$$\text{以 } r(A - I) = 2;$$

$$\textcircled{O} \quad (2) P^{-1}(A + I)P = P^{-1}AP + P^{-1}I P = B + I =$$

$$\textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \textcircled{C},$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ & & \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

相似具有传递性，所以 $A + I$ 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 自测题第五章难点解答

7. 原题：设  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 1; 1; 2 的特征向量，若  $v_1^T v_1 = v_2^T v_2 = 2$ ;  $v_3^T v_3 = 3$ ，记P是以  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  为列的矩阵，即， $P = (\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix})$ ，则  $P^T A P =$

## 自测题第五章难点解答

**7. 原题：**设  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵  $A$  分别属于特征值 1, 1, 2 的特征向量, 若  $\begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$ ;  $\begin{pmatrix} T \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$ , 记  $P$  是以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  为列的矩阵, 即,  $P = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ , 则  $P^T A P =$

解 @ B.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

## 自测题第五章难点解答

7. 原题：设  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵A分别属于特征值 1; 1; 2 的特征向量，若  $\begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} T \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_2 = 2$ ;  $\begin{pmatrix} T \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_3 = 3$ ，记P是以  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ ，则  $P^T A P =$

$$\begin{matrix} & 2 & 0 & 0 \\ \text{解} @ & 0 & 2 & 0 \end{matrix} \quad T$$

## 自测题第五章难点解答

7. 原题：设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是3阶实对称矩阵  $A$  分别属于特征值 1, 1, 2 的特征向量，若  $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2; \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记  $P$  是以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ ，则  $P^T A P =$

$$\begin{matrix} & 2 & 0 & 0 \\ \text{解} @ & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

理由：因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，

## 自测题第五章难点解答

**7. 原题：**设  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵  $A$  分别属于特征值 1; 1; 2 的特征向量，若  $\begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  分别是 1; 1; 2 的特征值，记  $P$  是以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  为列的矩阵，即， $P = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ ，则  $P^T A P =$

解 @ B.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

**理由：**因为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即， $\begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ l \end{pmatrix} = 0; k \neq l$ .

## 自测题第五章难点解答

**7. 原题:** 设  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵  $A$  分别属于特征值 1; 1; 2 的特征向量, 若  $\begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , 记  $P$  是以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  为列的矩阵, 即,  $P = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ , 则  $P^T A P =$

$$\text{A. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**理由:** 因为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量, 所以它们是两两正交的, 即,  $\begin{pmatrix} T \\ k \\ l \end{pmatrix} = 0; k \neq l$ .

$$P^T A P = \text{B. } \begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T A (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$$



## 自测题第五章难点解答

**7. 原题:** 设  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是3阶实对称矩阵  $A$  分别属于特征值 1, 1, 2 的特征向量, 若  $\begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , 记  $P$  是以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  为列的矩阵, 即,  $P = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix})$ , 则  $P^T A P =$

$$\text{A. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**理由:** 因为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量, 所以它们是两两正交的, 即,  $\begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} T \\ l \end{pmatrix} \quad (k \neq l)$ .

$$P^T A P = \text{B. } \begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T A (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}) = \text{B. } \begin{pmatrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T (\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix})$$



自测题第五章难点解答

$$= \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \textcircled{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \textcircled{C} \begin{matrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{O} \begin{matrix} T \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \textcircled{A} \left( \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} \right) = @ \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \textcircled{A} \\
 & \textcircled{O} \begin{matrix} T \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \textcircled{C} \\
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 6 \end{matrix}
 \end{aligned}$$



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{O} \begin{matrix} 1 \\ T \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \textcircled{A} \left( \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) = @ \textcircled{B} \begin{matrix} T & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \textcircled{C} \\
 & \textcircled{O} \begin{matrix} 1 \\ T \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \textcircled{A} \\
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 6 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

**8. 原题：**设 $A$ 是一个方阵，若 $A^2 = I$ ，则称 $A$ 是对合矩阵.

- (1) 设 $B$ 是一个实对合阵，则 $B$ 是对称阵是 $B$ 是正交阵的；
- (2) 设 $B$ 是一个实对称阵，则 $B$ 是对合阵是 $B$ 是正交阵的；
- (3) 设 $B$ 是一个正交矩阵，则 $B$ 是对称阵是 $B$ 是对合矩阵的；



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{O} \begin{matrix} 1 \\ T \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} T \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \textcircled{A} \left( \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) = @ \textcircled{B} \begin{matrix} T & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \textcircled{C} \begin{matrix} 1 \\ T \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \\
 & \textcircled{O} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \\
 = & @ \textcircled{B} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \textcircled{A} \\
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 6 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

**8. 原题：**设 $A$ 是一个方阵，若 $A^2 = I$ ，则称 $A$ 是对合矩阵.

- (1) 设 $B$ 是一个实对合阵，则 $B$ 是对称阵是 $B$ 是正交阵的；
  - (2) 设 $B$ 是一个实对称阵，则 $B$ 是对合阵是 $B$ 是正交阵的；
  - (3) 设 $B$ 是一个正交矩阵，则 $B$ 是对称阵是 $B$ 是对合矩阵的；
- 解 (1)充分必要条件；(2)充分必要条件；(3)充分必要条件.**



## 自测题第五章难点解答

理由：



# 自测题第五章难点解答

理由：(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对称矩阵， $B^2 = I$ ，

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ,

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，  
 $B^T = B$ ， $B$ 是对称阵；



## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ,

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，  
 $B^T = B$ ， $B$ 是对称阵；

(2)  $B$ 是实对称矩阵， $B^T = B$ ,



## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ,

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，  
 $B^T = B$ ， $B$ 是对称阵；

(2)  $B$ 是实对称矩阵， $B^T = B$ ,

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 $B$ 是正交阵；



## 自测题第五章难点解答

理由：(1)  $B$ 是实对称矩阵， $B^2 = I$



## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ,

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，  
 $B^T = B$ ， $B$ 是对称阵；

(2)  $B$ 是实对称矩阵， $B^T = B$ ,

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交阵，则 $BB^T = I$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 $B$ 是对合阵；

(3)  $B$ 是正交阵， $BB^T = I$ ,

## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)  $B$ 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ,

若 $B$ 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，  
 $B^T = B$ ， $B$ 是对称阵；

(2)  $B$ 是实对称矩阵， $B^T = B$ ,

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 $B$ 是正交阵；

若 $B$ 是正交阵，则 $BB^T = I$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 $B$ 是对合阵；

(3)  $B$ 是正交阵， $BB^T = I$ ,

若 $B$ 是对称阵，则 $B = B^T$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 $B$ 是对合阵；

## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.



## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

9. 原题：设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

# 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

解 @  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

# 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

解 @  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

理由：

## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

$$\text{解 } \textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \text{A.}$$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使  
得 $P^{-1}AP = B$ ，



## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

解 @  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使  
得 $P^{-1}AP = B$ ，从而 $P^{-1}(A^2 + A)P$



## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

解 @  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使  
得 $P^{-1}AP = B$ ，从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP$



## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩  
阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

$$\text{解 } \textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \text{A.}$$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使  
得 $P^{-1}AP = B$ ，从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP =$   
 $(P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B$ ，





## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

$$\text{解 } \begin{matrix} & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{B} @ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \text{A.}$$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP = B$ ，从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B$ ，

即，与矩阵 $A$ 相似的矩阵 $B$ 也满足 $B^2 + B = 0$ ，再，相似矩阵有相同的秩，所以 $B$ 的秩为2，

## 自测题第五章难点解答

若 $B$ 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从  
而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B = B^T$ ，所以 $B$ 是对称阵.

**9.原题：**设 $A$ 是3阶实对称矩阵，满足 $A^2 + A = 0$ ，若矩阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ ，则 $A$ 相似于

$$\text{解 } \textcircled{B} @ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \text{A.}$$

**理由：**假设 $A$ 与 $B$ 相似，则存在可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP = B$ ，从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B$ ，

即，与矩阵 $A$ 相似的矩阵 $B$ 也满足 $B^2 + B = 0$ ，再，相似矩阵有相同的秩，所以 $B$ 的秩为2，在所给的矩阵中，只有此矩阵满足秩为2， $B^2 + B = 0$ .

自测题第五章难点解答

1

1

10. 原题: 3维实向量  $X_0$  与  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  正交是  $X_0$  为齐次线性

$$\begin{array}{l} \text{方程组} \\ \left( \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 & x_3 & = 0 \end{array} \right) \end{array}$$



## 自测题第五章难点解答

1

1

10. 原题: 3维实向量  $X_0$  与  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  正交是  $X_0$  为齐次线性

(

$$\begin{array}{l} \text{方程组} \quad \begin{array}{l} x_1 \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 0 \end{array} \quad \text{解向量的} \end{array}$$

解 必要但非充分条件.



## 自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量  $X_0$  与  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  正交是  $X_0$  为齐次线性

$$\begin{array}{l} \text{方程组} \\ \left( \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 & x_3 & = 0 \end{array} \right) \end{array}$$

解 必要但非充分条件.

理由：



## 自测题第五章难点解答

10. 原题：3维实向量  $X_0$  与  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  正交是  $X_0$  为齐次线性

方程组 
$$\begin{matrix} x_1 & x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 & x_3 = 0 \end{matrix}$$
 解向量的

解 必要但非充分条件.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

理由：向量  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$  与向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  正交的充分必要条件是

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \text{ 是齐次方程 } ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \text{ 的解.}$$

## 自测题第五章难点解答

10. 原题：3维实向量  $X_0$  与  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  正交是  $X_0$  为齐次线性

$$\text{方程组 } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 & x_3 = 0 \end{pmatrix} \text{ 解向量的}$$

解 必要但非充分条件.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

理由：向量  $X_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$  与向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  正交的充分必要条件是

$$X_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \text{ 是齐次方程 } ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \text{ 的解.}$$

$$c_0$$

所以  $X_0$  满足齐次线性方程，一定与  $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  正交，但与  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  正交，不一定满足方程组中第二个方程.

# 自测题第五章难点解答

○ 11. 原题：设3阶实对称矩阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ , 满足  
 $A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 若取 $C = B \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 并作可逆

$$\text{线性变 } \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \otimes & 1 & \otimes & 1 & 1 \\ x_1 & \otimes & y_1 \\ @x_2 & C & @y_2 & C \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

则将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \otimes \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$  为标准形

 $x_3$

## 自测题第五章难点解答

○ 11. 原题：设3阶实对称矩阵 $A$ 的秩 $r(A) = 2$ , 满足  
 $A \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} = B \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$ , 若取 $C = B \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$ , 并作可逆

$$\text{线性变 } \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 \\ @x_2 \end{matrix} = C \begin{matrix} 1 & 1 \\ y_1 \\ @y_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ x_3 \\ y_3 \end{matrix}$$

则将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{smallmatrix} 1 & & \\ x_1 & & \\ @x_2 & & \end{smallmatrix}$  为标准形

解  $2y_1^2 + 2y_3^2$ .



## 自测题第五章难点解答

理由：



# 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{O} & & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$$

**理由：**因为  $A \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix}$ , 所以

$$A \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix} = (-1) \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix}; A \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \textcircled{B} \\ @ \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \textcircled{C} \\ A \end{smallmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**理由：**因为  $A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes A$ , 所以

$$A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes A$$

$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \end{matrix} \quad \text{所以 } A \text{ 有特征值 } 1, 1, \quad \text{属于它们的特征向量分别是}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \end{matrix}$$

又因为  $A$  的秩  $r(A) = 2$ , 所以  $A$  有 0 特征值,

## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**理由：**因为  $A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 所以

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & 1 \end{matrix}$$

所以  $A$  有特征值  $1, 1$ , 属于它们的特征向量分别是  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \end{matrix}$$

又因为  $A$  的秩  $r(A) = 2$ , 所以  $A$  有 0 特征值, 而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的,



## 自测题第五章难点解答

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**理由：**因为  $A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 所以

$$A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $A$  有特征值  $1, 1, 0$ , 属于它们的特征向量分别是  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

又因为  $A$  的秩  $r(A) = 2$ , 所以  $A$  有 0 特征值, 而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的,

所以,

# 自测题第五章难点解答

O

属于特征值0的特征向量与<sup>B</sup>

# 自测题第五章难点解答

O

属于特征值0的特征向量与<sup>B</sup>

# 自测题第五章难点解答

$\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}$      $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}$      $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 0 & \end{matrix}$   
 属于特征值0的特征向量与  $\begin{matrix} & B \\ & C \\ 0 & A \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & B \\ & C \\ @0 & A \end{matrix}$  都正交, 为  $\begin{matrix} & B \\ & C \\ @1 & A \end{matrix}$ ,

$$\begin{matrix}
 & 0 & 0 & 1 \\
 & B & B & C \\
 @A & @0 & A
 \end{matrix}
 \quad
 \begin{matrix}
 & 0 & 1 \\
 & B & C \\
 A & @1 & A
 \end{matrix}
 \quad
 \begin{matrix}
 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & C \\
 A & @0 & AA
 \end{matrix}
 = \begin{matrix}
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1
 \end{matrix}$$



## 自测题第五章难点解答

$\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}$ ,  $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}$ ,  
 属于特征值0的特征向量与  $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}$  都正交, 为  $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}$ ,

$$\text{所以 } AC = \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{所以 } C^T AC = \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

所以所 标准形为  $2y_1^2 + 2y_3^2$ .



## 自测题第五章难点解答

12. 原题：设3阶实对称矩阵 $A$ 的各行元素之和均为3，

$\textcircled{1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\textcircled{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的两个解

向量，取 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , 则 $C^T AC =$



## 自测题第五章难点解答

12. 原题：设3阶实对称矩阵 $A$ 的各行元素之和均为3，

$\textcircled{1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\textcircled{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的两个解

向量，取  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , 则  $C^T AC =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解  $\textcircled{B} @ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## 自测题第五章难点解答

理由：

# 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 2 & \\ \textcircled{B} & 1 \\ \textcircled{C} & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 0 & \\ \textcircled{B} & 1 \\ \textcircled{C} & \end{matrix}$$

**理由：**因为  $AX = 0$  有解  $\textcircled{1} = @ \textcircled{1} \text{A}$ ;  $\textcircled{2} = @ \textcircled{1} \text{A}$ , 所以矩

阵  $A$  有 0 特征值, 属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量

$\textcircled{1} / \textcircled{2}$ ,



# 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 2 & \\ \textcircled{B} & \textcircled{C} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 0 & \\ \textcircled{B} & \textcircled{C} \end{matrix}$$

**理由：**因为  $AX = 0$  有解  $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = @ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} A$ ;  $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} = @ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} A$ , 所以矩

阵  $A$  有 0 特征值，属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量  
 $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$ , 又因为  $A$  的各行元素之和相等, 为 3,



自测题第五章难点解答

**理由:** 因为 $AX = 0$ 有解  $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \textcircled{B} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \textcircled{C}$ ;  $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = \textcircled{B} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \textcircled{C}$ , 所以矩阵

阵 $A$ 有0特征值, 属于0特征值有两个线性无关的特征向量

1: 2, 又因为A的各行元素之和相等, 为3, 所以A有特征值3,

属于特征值3的特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$





## 自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 1 \\ \textcircled{O} & 2 \\ & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & 1 \\ \textcircled{O} & 0 \\ & 1 \end{matrix}$$

**理由：**因为  $AX = 0$  有解  $\textcircled{1} = \textcircled{B} \textcircled{1} \textcircled{A}$ ;  $\textcircled{2} = \textcircled{B} \textcircled{1} \textcircled{A}$ , 所以矩

$$\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}$$

阵  $A$  有 0 特征值, 属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量

$\textcircled{1} / \textcircled{2}$ , 又因为  $A$  的各行元素之和相等, 为 3, 所以  $A$  有特征值 3,

$$\textcircled{O} \textcircled{1}$$

属于特征值 3 的特征向量为  $\textcircled{3} = \textcircled{B} \textcircled{1} \textcircled{A}$ , 将特征向量正交 和单

$$\begin{matrix} 1 \end{matrix}$$

位, 得矩阵  $A$  属于特征值 0 的正交单位向量

$$\textcircled{B} \textcircled{\frac{2}{6}} \textcircled{C}; \textcircled{B} \textcircled{0} \textcircled{C}; \textcircled{B} \textcircled{\frac{1}{6}} \textcircled{A}; \textcircled{B} \textcircled{\frac{1}{2}} \textcircled{A}, \textcircled{3} \text{ 单位 } \text{得} \textcircled{B} \textcircled{\frac{1}{3}} \textcircled{C}, C^T A C = \begin{matrix} & 1 \\ \textcircled{O} & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \textcircled{A}.$$



*Thank you!*

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics  
SuZhou University  
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email : Ning.qun@163.com

