

目录

① 第1节

② 第2节

③ 第3节

④ 第4节



自测题第五章难点解答

1.原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以
为 B 是矩阵 A 与 B 等价的



自测题第五章难点解答

1. **原题：** 设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以
为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件



自测题第五章难点解答

1. 原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以
为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件

理由：



自测题第五章难点解答

1.原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以
为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件

理由： A 经过初等行变 为 B ，则 A 与 B 等价；



自测题第五章难点解答

1.原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以
为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件

理由： A 经过初等行变 为 B ，则 A 与 B 等价；但等价矩
阵未必经过初等行变 可以 .



自测题第五章难点解答

1.原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件

理由： A 经过初等行变 为 B ，则 A 与 B 等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 . 例如，

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 等价，但 A 经过初等行变 得不到 B .



自测题第五章难点解答

1.原题：设 $A; B$ 是两个同阶矩阵，则 A 经过初等行变 可以为 B 是矩阵 A 与 B 等价的

解 充分但非必要条件

理由： A 经过初等行变 为 B ，则 A 与 B 等价；但等价矩阵未必经过初等行变 可以 . 例如，

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 等价，但 A 经过初等行变 得不到 B .

2.原题：设 $A; P$ 均是3阶方阵， P 是以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列向量的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ ， P^T 为 P 的转置矩阵， P^{-1} 是 P 的逆矩阵，记 $Q = (\alpha_1 + \alpha_2 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ ，



自测题第五章难点解答

$$(1) \text{若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = ;$$

$$(2) \text{若 } P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1} A Q = ;$$



自测题第五章难点解答

$$(1) \text{若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = ;$$

$$(2) \text{若 } P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1} A Q = ;$$

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.



自测题第五章难点解答

$$(1) \text{若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = ;$$

$$(2) \text{若 } P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1} A Q = ;$$

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

理由:



自测题第五章难点解答

$$(1) \text{若 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}, \text{ 则 } Q^T A Q =;$$

$$(2) \text{若 } P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}, \text{ 则 } Q^{-1} A Q =;$$

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}$.

理由: 因为 $Q = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}$, 所以



自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 (1) Q^T A Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 (1) Q^T A Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$



自测题第五章难点解答

$$\begin{aligned}
 (1) Q^T A Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} \\
 (2) Q^{-1} A Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B & C \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

$$(1) Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ B \\ C \end{pmatrix};$$

$$(2) Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ B \\ C \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

3. 原题:

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 5 & b & 2 \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) 则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$; (2) 对应的特征值 $=$



自测题第五章难点解答

3.原题:

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) 则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$; (2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; (2) $= 1$.



自测题第五章难点解答

3.原题:

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) 则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$; (2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; (2) $= 1$.

理由:



自测题第五章难点解答

3.原题:

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$

(1) 则 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$; (2) 对应的特征值 $=$

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; (2) $= 1$.

理由: $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



自测题第五章难点解答

!



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得， $2 + a = 1$; $1 + b = 1$; $a = -1$, $b = 0$.



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得， $2 + a = 1$; $1 + b = 1$; $= 1$,

所以 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; (2) $= 1$.



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

比较两边, 既得, $2 + a = 1; 1 + b = 1; \quad = 1,$

$$\text{所以 (1) } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}; (2) = 1.$$

4. 原题: 设 A 为 3 阶方阵, 矩阵 A 对应特征值 2; 2; 1 的特征

$$\text{向量分别是 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A =$$



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

比较两边, 既得, $2 + a = 1; 1 + b = 1; \quad = 1,$

$$\text{所以 (1) } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}; (2) = 1.$$

4. 原题: 设A为3阶方阵, 矩阵A对应特征值2; 2; 1的特征

向量分别是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则A =

$$\text{解 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

理由：



自测题第五章难点解答

理由：取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,



自测题第五章难点解答

理由：取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

自测题第五章难点解答

理由: 取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第五章难点解答

理由: 取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

理由: 取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A:$$

5. 原题: 设 A 是 2 阶方阵, α_1, α_2 是线性无关的 2 维向量,

$$A\alpha_1 = 0,$$

(1) 若 $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则矩阵 A 相似于;

(2) 若 $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则矩阵 A 相似于



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{array}{cc} & ! \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} ; \quad (2) \begin{array}{cc} & ! \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} .$$



自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^!$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^!$.

理由:



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^! ; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^! .$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2$ 都是非零向量，



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2$ 都是非零向量，

$$(1) A(2\alpha_1 + \alpha_2)$$



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是非零向量，

(1) $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值1的特征向量，



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ (2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是非零向量，

(1) $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值1的特征向量，即A有特征值0和1，相似于对角阵.



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是非零向量，

(1) $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值1的特征向量，即A有特征值0和1，相似于对角阵.

$$(2) A(\alpha_1 + \alpha_2)$$



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是非零向量，

(1) $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值1的特征向量，即A有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ ，所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值



自测题第五章难点解答

$$\text{解 (1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由：因为 α_1, α_2 线性无关，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是非零向量，

(1) $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，所以 $2\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值1的特征向量，即A有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ ，所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是属于特征值2的特征向量，即A有特征值0和2，相似于对角阵.







自测题第五章难点解答

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 1 \\
 2 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

解 (1) 1; (2) 0.

理由:



自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 0 & & 1 \\ & 2 & 0 & 0 \\ \text{解 (1)} & 1; & (2) & B \\ & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ C \\ A. \end{matrix}$$

理由：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P ，使得
 $P^{-1}AP = B$,



自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} & 0 & & 1 \\ & 2 & 0 & 0 \\ \text{解 (1)} & 1; & (2) & @ \end{matrix} \begin{matrix} B \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} C \\ A. \end{matrix}$$

理由：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$\begin{matrix} 0 & (1) & P^{-1}(A_1 & I)P = P^{-1}AP & P^{-1}IP = B & I = \\ & 1 & 0 & 1 \\ B & & & & & C \\ @ & 0 & 0 & 0 & A, \\ & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$



自测题第五章难点解答

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

解 (1) $\begin{matrix} B \\ @ \end{matrix}$ 1; (2) $\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}$ 0.

理由：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$(1) P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B \\ @ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ A \end{matrix}, r(B - I) = 1, \text{ 而相似矩阵有相同的秩, 所}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 以 } r(A - I) = 2;$$



自测题第五章难点解答

$$\begin{matrix} 0 & & 1 \\ & 2 & 0 & 0 \\ \text{解 (1)} & 1; & (2) & @ \end{matrix} \begin{matrix} B \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} C \\ A. \end{matrix}$$

理由：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

$$(1) P^{-1}(A - I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}, r(B - I) = 1, \text{ 而相似矩阵有相同的秩, 所以}$$

$$(2) P^{-1}(A + I)P = P^{-1}AP + P^{-1}IP = B + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix},$$

$$(2) P^{-1}(A + I)P = P^{-1}AP + P^{-1}IP = B + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix},$$





自测题第五章难点解答

相似具有传递性，所以 $A + I$ 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = 1, \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$



自测题第五章难点解答

7. 原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解：B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ C.



自测题第五章难点解答

7. 原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解：B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$



自测题第五章难点解答

7. 原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解 B @ 0 2 0 0 A. C.

理由：因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，



自测题第五章难点解答

7. 原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解 B @ 0 2 0 A. C.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

理由：因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即， $\alpha_k^T \alpha_l = 0; k \neq l$.



自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **C.**

理由：因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即， $\alpha_k^T \alpha_l = 0; k \neq l$.

$P^T A P = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} A (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$



自测题第五章难点解答

7.原题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3阶实对称矩阵 A 分别属于特征值 $1, 1, 2$ 的特征向量，若 $\alpha_1^T \alpha_1 = \alpha_2^T \alpha_2 = 2, \alpha_3^T \alpha_3 = 3$ ，记 P 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即， $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ，则 $P^T A P =$

解 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **C.**

理由：因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即， $\alpha_k^T \alpha_l = 0; k \neq l$.

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T A \alpha_1 & \alpha_1^T A \alpha_2 & \alpha_1^T A \alpha_3 \\ \alpha_2^T A \alpha_1 & \alpha_2^T A \alpha_2 & \alpha_2^T A \alpha_3 \\ \alpha_3^T A \alpha_1 & \alpha_3^T A \alpha_2 & \alpha_3^T A \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T_1 & C \\ T_2 & A \\ T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_1 & 1 & T_1 & 2 & 2 & T_1 & 3 \\ T_2 & 1 & T_2 & 2 & 2 & T_2 & 3 \\ T_3 & 1 & T_3 & 2 & 2 & T_3 & 3 \end{pmatrix} C$$



自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T_1 & 1 \\ T_2 & 2 \\ T_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_1 & 1 \\ T_2 & 2 \\ T_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_1 & 1 \\ T_2 & 2 \\ T_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) 设 B 是一个正交矩阵, 则 B 是对称阵是 B 是对合矩阵的;



自测题第五章难点解答

理由：



自测题第五章难点解答

理由: (1) B 是实对合矩阵, $B^2 = I$,



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；

若 B 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B^T = B$ ， B 是对称阵；



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；

若 B 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B^T = B$ ， B 是对称阵；

(2) B 是实对称矩阵， $B^T = B$ ，



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；

若 B 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B^T = B$ ， B 是对称阵；

(2) B 是实对称矩阵， $B^T = B$ ，

若 B 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 B 是正交阵；



自测题第五章难点解答

理由: (1) B 是实对合矩阵, $B^2 = I$



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；

若 B 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B^T = B$ ， B 是对称阵；

(2) B 是实对称矩阵， $B^T = B$ ，

若 B 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 B 是正交阵；

若 B 是正交阵，则 $BB^T = I$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 B 是对合阵；

(3) B 是正交阵， $BB^T = I$ ，



自测题第五章难点解答

理由：(1) B 是实对合矩阵， $B^2 = I$ ，

若 B 是对称矩阵，则 $B = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， B 是正交阵；

若 B 是正交矩阵，则 $B^{-1} = B^T$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ， $B^T = B$ ， B 是对称阵；

(2) B 是实对称矩阵， $B^T = B$ ，

若 B 是对合阵，则 $B^2 = I$ ，从而 $BB^T = B^2 = I$ ，所以 B 是正交阵；

若 B 是正交阵，则 $BB^T = I$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 B 是对合阵；

(3) B 是正交阵， $BB^T = I$ ，

若 B 是对称阵，则 $B = B^T$ ，从而 $B^2 = BB^T = I$ ，所以 B 是对合阵；



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
而 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解 $\textcircled{B}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textcircled{C}.$$



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

$$\text{解 } \textcircled{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textcircled{C}.$$

理由:



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

$$\text{解 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$,



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 从而 $P^{-1}(A^2 + A)P =$



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$, 从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP$



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解 $\textcircled{B}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textcircled{C}.$$

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B$,



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解 $\textcircled{B}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\textcircled{C}$.

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$, 从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP =$
 $(P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B,$

即, 与矩阵 A 相似的矩阵 B 也满足 $B^2 + B = 0$, 再, 相似矩阵有相同的秩, 所以 B 的秩为2,



自测题第五章难点解答

若 B 是对合阵, 则 $B^2 = I$, 从而
 $BB^T = B^2 = I$, $B = B^T$, 所以 B 是对称阵.

9.原题: 设 A 是3阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + A = 0$, 若矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 则 A 相似于

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由: 假设 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$, 从而 $P^{-1}(A^2 + A)P = P^{-1}(A^2)P + P^{-1}AP =$
 $(P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = B^2 + B,$

即, 与矩阵 A 相似的矩阵 B 也满足 $B^2 + B = 0$, 再, 相似矩阵有相同的秩, 所以 B 的秩为2, 在所给的矩阵中, 只有此矩阵满足秩为2, $B^2 + B = 0$.



自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量 X_0 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正交是 X_0 为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的



自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量 X_0 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正交是 X_0 为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.



自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量 X_0 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正交是 X_0 为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

理由:



自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量 X_0 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ 正交是 X_0 为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但非充分条件.

理由: 向量 $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ 正交的充分必要条件是

$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ 是齐次方程 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ 的解.



自测题第五章难点解答

10. 原题: 3维实向量 X_0 与 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交是 X_0 为齐次线性

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解向量的

解 必要但不充分条件.

理由: 向量 $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交的充分必要条件是

$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ 是齐次方程 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ 的解.

所以 X_0 满足齐次线性方程, 一定与 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交, 但与 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交, 不一定满足方程组中第二个方程.



自测题第五章难点解答

11. 原题：设3阶实对称矩阵A的秩 $r(A) = 2$ ，满足

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A, \text{ 若取 } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 并作可逆}$$

$$\text{线性变} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} A,$$

$$\text{则将二次型 } f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 为标准形}$$



自测题第五章难点解答

11. 原题: 设3阶实对称矩阵A的秩 $r(A) = 2$, 满足

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A, \text{ 若取 } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 并作可逆}$$

$$\text{线性变} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} A,$$

则将二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C$ 为标准形

解 $2y_1^2 + 2y_3^2.$



自测题第五章难点解答

理由：



自测题第五章难点解答

理由：因为 $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$, 所以

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A; A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C$$



自测题第五章难点解答

理由：因为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C; A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

所以 A 有特征值 $1, 1$, 属于它们的特征向量分别是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

又因为 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有 0 特征值,



自测题第五章难点解答

理由：因为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A; A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

所以 A 有特征值 $1, 1$, 属于它们的特征向量分别是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

又因为 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有 0 特征值, 而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的,



自测题第五章难点解答

理由：因为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C; A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

所以 A 有特征值 $1, 1$, 属于它们的特征向量分别是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

又因为 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有 0 特征值, 而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的,

所以,



自测题第五章难点解答

0

属于特征值0的特征向量与 B 

自测题第五章难点解答

0

属于特征值0的特征向量与 B 

自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ 都正交, 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$,

$$\text{所以 } AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$



自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ 都正交, 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$,

$$\text{所以 } AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

所

$$\text{以 } C^T AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

所以所 标准形为 $2y_1^2 + 2y_2^2$.



自测题第五章难点解答

12. 原题: 设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3,

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的两个解

向量, 取 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 则 $C^T AC =$



自测题第五章难点解答

12. 原题: 设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3,

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的两个解

向量, 取 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 则 $C^T AC =$

解 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



自测题第五章难点解答

理由：



自测题第五章难点解答

理由：因为 $AX = 0$ 有解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩

阵 A 有 0 特征值，属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，



自测题第五章难点解答

理由：因为 $AX = 0$ 有解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩

阵 A 有 0 特征值，属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，又因为 A 的各行元素之和相等，为 3，



自测题第五章难点解答

理由：因为 $AX = 0$ 有解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩

阵 A 有 0 特征值，属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量 α_1, α_2 ，又因为 A 的各行元素之和相等，为 3，所以 A 有特征值 3，

属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，



自测题第五章难点解答

理由：因为 $AX = 0$ 有解 $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩

阵 A 有 0 特征值，属于 0 特征值有两个线性无关的特征向量 x_1, x_2 ，又因为 A 的各行元素之和相等，为 3，所以 A 有特征值 3，

属于特征值 3 的特征向量为 $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，将特征向量正交化和单

位化，得矩阵 A 属于特征值 0 的正交单位向量

$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, β_3 单位得 $\beta_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C^T A C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

