线性代

第五章：矩州的等价　相似与合

宿　学院　　学与　计学院

目录

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n\ \ n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩州 P 和对角矩州 D，得 $P^{\ 1}AP = D$.

本节将给出矩州 A 所要满足的　件，并给出可逆矩州 P 和对角矩州 D 的求法.

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n\ \ n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩州 P 和对角矩州 D ， 得 $P\ ^{1}AP = D$.

本节将给出矩州 A 所要满足的 件，并给出可逆矩州 P 和对角矩州 D 的求法.

对角矩州 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$，并将可逆矩州 P 进行列分块 记 $P = (\eta_1\ \ \eta_2\ \ \ \ \eta_n)$，

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩州 P 和对角矩州 D ， 得 $P^{\ \ 1}AP = D$.

本节将给出矩州 A 所要满足的　件，并给出可逆矩州 P 和对角矩州 D 的求法.

$$\text{对角矩州 } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

并将可逆矩州 P 进行列分块　记 $P = (\eta_1 \quad \eta_2 \qquad \eta_n)$，即，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$　可逆矩州 P 的第1　第 n 列对应的列向量，它们　线性无关的.

由 $P^{\ \ 1}AP = D$，则 $AP = PD$，即

$$A(\eta_1 \qquad \eta_n) = (\eta_1 \qquad \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \qquad A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \qquad \lambda_n\eta_n),$$

从而对 意的1 k n ，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

5.2 矩州的对角化

依据分块矩州的乘法,

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \qquad A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \qquad \lambda_n\eta_n),$$

从而对 意的1 k n , 都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

即, 矩州 A 可以对角化, 则矩州 A和对角矩州 D 的对角元素与可逆矩州 P的列向量 间必满足关系 (1).

5.2 矩州的对角化

依据分块矩州的乘法，

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \qquad A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \qquad \lambda_n\eta_n),$$

从而对　意的$1 \quad k \quad n$，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad\qquad (1)$$

即，　矩州A 可以对角化，则矩州A和对角矩州D 的对角元素与可逆矩州P的列向量　间必满足关系　(1).

定义5.5

5.2 矩州的对角化

依据分块矩州的乘法,

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \qquad A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \qquad \lambda_n\eta_n),$$

从而对　意的1　k　n，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

即，　矩州 A 可以对角化，则矩州 A和对角矩州 D 的对角元素与可逆矩州 P的列向量　间必满足关系　(1).

定义5.5　$A = (a_{ij})_{n \quad n}$，　存在非0 向量η 和　λ，满足 $A\eta = \lambda\eta$，则称λ　矩州 A 的一个　　，η　矩州 A　于　λ 的　向量.

5.2 矩州的对角化

$A=(a_{ij})_{n\ \ n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P ，　得 $P\ \ ^{1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量　矩州 A的n个线性无关的　　向量.

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P，　得 $P^{\ 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量　矩州 A的n个线性无关的　　向量.

A 有n 个线性无关的　　向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$，且　向量$\eta_k$ 相应的　　　为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P，则

5.2 矩阵的对角化

$A = (a_{ij})_{n \ n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵 P， 得 $P^{\ 1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量 矩阵 A的n个线性无关的 向量.

A 有n 个线性无关的 向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且 向量η_k 相应的 为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩阵 P ，则

AP

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P， 得 $P^{\ 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量 矩州 A的n个线性无关的 向量.

A 有n 个线性无关的 向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且 向量η_k 相应的 为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P ，则

$$AP \quad = A(\eta_1 \ \eta_2 \qquad \eta_n)$$

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P， 得 $P^{\quad 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量 矩州 A的n个线性无关的 向量.

A 有n 个线性无关的 向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且 向量η_k 相应的 为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P ，则

$$AP \quad = A(\eta_1 \ \eta_2 \qquad \eta_n) \qquad\qquad = (A\eta_1 \ A\eta_2 \qquad A\eta_n)$$

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P ， 得 $P^{\ \ 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k \eta_k$，$P$ 的列向量 矩州 A的n个线性无关的 向量.

A 有n 个线性无关的 向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且 向量η_k 相应的 为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P ，则

$$AP = A(\eta_1 \ \eta_2 \quad \eta_n) = (A\eta_1 \ A\eta_2 \quad A\eta_n)$$

$$= (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \quad \lambda_n\eta_n)$$

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n\quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P ，　得 $P^{\ 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量　矩州 A的n个线性无关的　　向量.

A 有n 个线性无关的　　向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且　向量η_k 相应的　　　为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P ，则

$$AP = A(\eta_1\ \eta_2\ \quad \eta_n) = (A\eta_1\ A\eta_2\ \quad A\eta_n)$$

$$= (\lambda_1\eta_1\ \ \lambda_2\eta_2\ \quad \lambda_n\eta_n) = (\eta_1\ \quad \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5.2 矩州的对角化

$A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 可以对角化，存在可逆矩州 P ，　得 $P^{\ 1}AP$ 为对角州，即，$A\eta_k = \lambda_k\eta_k$，$P$ 的列向量　矩州 A的n个线性无关的　　向量.

A 有n 个线性无关的　　向量，记为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ，且　向量η_k 相应的　　　为λ_k，以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P ，则

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\eta_1 \ \eta_2 \quad\quad \eta_n) = (A\eta_1 \ A\eta_2 \quad\quad A\eta_n) \\
&= (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \quad\quad \lambda_n\eta_n) = (\eta_1 \quad\quad \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

5.2 矩州的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.2 矩州的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$ ，P 可逆，所以

$$P^{\ \ 1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩州 A 相似于对角州，矩州 A可以对角化.

定理5.3　$A = (a_{ij})_{n\quad n}$ ，则矩州 A 可以对角化的充要　件矩州 A 有n 个线性无关　　向量.

5.2 矩州的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩州 A 相似于对角州，矩州 A可以对角化.

定理5.3 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，则矩州 A 可以对角化的充要 件 矩州 A 有n 个线性无关 向量.

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 矩州 A 分别 于 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 的n 个线性无关的 向量. 以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩州 P，

则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. 称为矩州 A 的相似标准形.

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵 $A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 否可以对角化， 先求出矩阵 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的向量个 否为A的阶 n.

5.2 矩州的对角化

由定理5.3，判定矩州 $A = (a_{ij})_{n \quad n}$ 否可以对角化， 先求出矩州 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的 向量个 否为A的阶 n.

定理5.4

5.2 矩州的对角化

由定理5.3，判定矩州 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$ 否可以对角化， 先求出矩州 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的 向量个 否为 A 的阶 n.

定理5.4 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$，η_1 矩州 A 于 λ_1 的 向量，η_2 矩州 A 于 λ_2 的 向量 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 η_1,η_2 线性无关.

5.2 矩州的对角化

由定理5.3，判定矩州 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$ 否可以对角化， 先求出矩州 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的 向量个 否为 A 的阶 n.

定理5.4 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$，η_1 矩州 A 于 λ_1 的 向量，η_2 矩州 A 于 λ_2 的 向量

$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 η_1,η_2 线性无关.

即，矩州 A 于不 的 向量 线性无关的.

5.2 矩州的对角化

由定理5.3，判定矩州 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$ 否可以对角化， 先求出矩州 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的 向量个 否为A的阶 n.

定理5.4 $A=(a_{ij})_{n\ \ n}$，η_1 矩州 A 于 λ_1 的 向量，η_2 矩州 A 于 λ_2的 向量

$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则η_1,η_2 线性无关.

即，矩州 A 于不 的 向量 线性无关的.

定理5.5

5.2 矩州的对角化

由定理5.3，判定矩州 $A=(a_{ij})_{n\ n}$ 否可以对角化， 先求出矩州 A 部的 与 向量， 后判定线性无关的 向量个 否为A的阶 n.

定理5.4 $A=(a_{ij})_{n\ n}$ ，η_1 矩州 A 于 λ_1 的 向量，η_2 矩州 A 于 λ_2的 向量

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则η_1,η_2 线性无关.

即，矩州 A 于不 的 向量 线性无关的.

定理5.5 矩州 A 有n 个互不相 的 ，则A 一定可以对角化.

5.2 矩阵的对角化

矩阵的　　　　与　　　向量的求法.

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州 A 于 λ_0 的 向量，即 $A\eta = \lambda_0\eta$.

5.2 矩州的对角化

矩州的　　与　　向量的求法.

假　η　矩州 A　于　　λ_0 的　　向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积　间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta,$$

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州 A 于 λ_0 的 向量，即 $A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积 间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0,$$

即，η 齐次线性方程组 $(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 的非零解.

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州 A 于 λ_0 的 向量，即 $A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积 间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0,$$

即，η 齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$的非零解.

η 齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$的非零解，

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州A 于 λ_0 的 向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积 间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0,$$

即，η 齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$的非零解.

η 齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0, \quad A\eta = \lambda_0\eta,$$

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州 A 于 λ_0 的 向量，即 $A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积 间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0,$$

即，η 齐次线性方程组 $(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 的非零解.

η 齐次线性方程组 $(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0, \quad A\eta = \lambda_0\eta,$$

即，η 矩州 A 于 λ_0 的 向量

5.2 矩州的对角化

矩州的 与 向量的求法.

假 η 矩州 A 于 λ_0 的 向量，即 $A\eta = \lambda_0\eta$.由积与矩州乘积 间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0,$$

即，η 齐次线性方程组 $(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 的非零解.

η 齐次线性方程组 $(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n \quad A)\eta = 0, \quad A\eta = \lambda_0\eta,$$

即，η 矩州 A 于 λ_0 的 向量

$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$ 有非0 解的 λ_0 就 .

5.2 矩州的对角化

由4.3节的 论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要 件其系 行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，

5.2 矩州的对角化

由4.3节的　论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要　件其系　行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的　　就　满足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

5.2 矩州的对角化

由4.3节的 论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X$ = 0有非0 解的充要 件 其系 行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的 就 满 足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6

5.2 矩州的对角化

由4.3节的 论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要 件其系 行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的 就 满足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 $A = (a_{ij})_{n \quad n}$，称$\det(\lambda I_n \quad A) = j\lambda I_n \quad Aj$ 为矩州 A 的 多项 .

5.2 矩州的对角化

由4.3节的　论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要　件其系　行列　$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的　　就　满足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6　$A = (a_{ij})_{n \quad n}$，称$\det(\lambda I_n \quad A) = j\lambda I_n \quad Aj$ 为矩州 A 的　　多项　.

矩州 A 的　　就　A 的　　多项　的根.所以，矩州的　与　　向量可以按　下步　求得

5.2 矩州的对角化

由4.3节的 论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要 件其系 行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的 就 满足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 $A = (a_{ij})_{n \quad n}$，称$\det(\lambda I_n \quad A) = j\lambda I_n \quad Aj$ 为矩州 A 的 多项 .

矩州 A 的 就 A 的 多项 的根.所以，矩州的 与 向量可以按 下步 求得

(1)求 .计算矩州 A 的 多项 $\det(\lambda I_n \quad A)$，并求$\det(\lambda I_n \quad A) = 0$ 的根. 即得矩州 A 的 部不 ，为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$;

5.2 矩州的对角化

由4.3节的 论4.2，$(\lambda_0 I_n \quad A)X = 0$有非0 解的充要 件其系 行列 $\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$，所以矩州 A 的 就 满足$\det(\lambda_0 I_n \quad A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 $A = (a_{ij})_{n \quad n}$，称$\det(\lambda I_n \quad A) = |\lambda I_n \quad A|$ 为矩州 A 的 多项 .

矩州 A 的 就 A 的 多项 的根.所以，矩州的 与 向量可以按 下步 求得

(1)求 .计算矩州 A 的 多项 $\det(\lambda I_n \quad A)$，并求$\det(\lambda I_n \quad A) = 0$ 的根. 即得矩州 A 的 部不 ，为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$；

(2)求 向量.将$\lambda = \lambda_k$ 代 方程组$(\lambda I_n \quad A)X = 0$，求基础解系.求得矩州 A 于 λ_k 的t_k 个线性无关的 向量， 为$\eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kt_k}$.

5.2 矩州的对角化

得到矩州 A 的 部线性无关 向量

$$\eta 11, \cdots, \eta 1t_1, \eta 21, \cdots, \eta 2t_2, \cdots, \eta s1, \cdots, \eta st_s.$$

5.2 矩州的对角化

得到矩州 A 的 部线性无关 向量

$$\eta_{11}, \dots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \dots, \eta_{2t_2}, \dots, \eta_{s1}, \dots, \eta_{st_s}.$$

(3)判定. $t_1 + t_2 + \quad + t_s < n$，$A$ 线性无关的 向量个小于n，矩州 A 不能对角化；

$t_1 + t_2 + \quad + t_s = n$，$A$可以对角化.($A$为$n \quad n$阶矩州).

5.2 矩阵的对角化

得到矩阵 A 的 部线性无关 向量

$$\eta_{11}, \ldots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{2t_2}, \ldots, \eta_{s1}, \ldots, \eta_{st_s}.$$

(3)判定. $t_1 + t_2 + \quad + t_s < n$，$A$ 线性无关的 向量个小于n，矩阵 A 不

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$的 与 向量，判定$A$可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D， $P^{\ 1}AP = D$.

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D， $P\ ^{1}AP = D$.

解

5.2 矩州的对角化

例5.2

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D，$P\ {}^{1}AP = D$.

解 A 的 多项

$$|\lambda I_2 \quad A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 & \\ 1 & & \lambda & 4 \end{vmatrix}$$

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D， $P\ ^{1}AP = D$.

解 A 的 多项

$$j\lambda I_2 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 \quad 5\lambda + 6$$

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D，$P^{\ 1}AP = D$.

解 A 的 多项

$$j\lambda I_2 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 & \\ 1 & & \lambda & 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 \quad 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda \quad 2)(\lambda \quad 3)$$

A的 部 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$

对 $\lambda_1 = 2$，$(2I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D，$P\ ^{1}AP = D.$

解 A 的 多项

$$j\lambda I_2 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda \quad 1 & 2 \\ 1 & \lambda \quad 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 \quad 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda \quad 2)(\lambda \quad 3)$$

A的 部 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$

对 $\lambda_1 = 2$，$(2I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$

解方程组，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $!$

5.2 矩州的对角化

例5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$ 的 与 向量，判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆州P 对角州D， $P\ ^1AP = D$.

解 A 的 多项

$$j\lambda I_2 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 \quad 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda \quad 2)(\lambda \quad 3)$$

A的 部 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$

对 $\lambda_1 = 2$，$(2I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$

解方程组，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.2 矩州的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.2 矩州的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2 = 3$，$(3I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的 向量为

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2 = 3$，$(3I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $!$

5.2 矩州的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2 = 3$，$(3I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2 矩州的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的 向量为

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2 = 3$，$(3I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ ，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

得基础解系$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

5.2 矩州的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的 向量为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2 = 3$，$(3I_2 \quad A)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$,

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

得基础解系$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

即，A 于 $\lambda_2 = 3$ 的线性无关的 向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.2 矩州的对角化

A 有2 个线性无关的 向量，所以A 可以对角化.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}，则 P\ ^{1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩州的对角化

A 有2 个线性无关的　　向量，所以A 可以对角化.

$$P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}，则 P^{\ 1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

例5.3

5.2 矩州的对角化

A 有2 个线性无关的　　向量，所以A 可以对角化.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}，\text{则} P^{\ 1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

例5.3　$A = \begin{pmatrix} 2 & \ \ 2 & 2 \\ \ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & \ \ 1 \end{pmatrix}$，求$A$ 的　　与　　向量，并判定A 可否对角化.

可对角化，求可逆矩州 P 和对角州 D ，　得$P^{\ 1}AP = D$.

5.2 矩州的对角化

解

5.2 矩州的对角化

解 A 的 多项

$j\lambda I_3 \quad Aj$

5.2 矩州的对角化

解 A 的 多项

$$j\lambda I_3 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda \quad 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

5.2

A

5.2

A

5.2 矩州的对角化

解 A 的 多项

$$
j\lambda I_3 \quad Aj = \begin{vmatrix} \lambda \quad 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda \quad 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 & 4 \\ 0 & \lambda \quad 3 & \lambda \quad 3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda \quad 2 & 4 & 2 \\ 2 & \lambda + 5 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda \quad 3 \end{vmatrix} = (\lambda \quad 3) \begin{vmatrix} \lambda \quad 2 & 4 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix}
$$

5.2

A

5.2 矩州的对角化

$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

5.2 矩州的对角化

λ_1 = 3，解方程组

$$(3I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad !$$

5.2 矩州的对角化

$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

有基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.2 矩州的对角化

即，A 于 $\lambda_1 = 3$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩州的对角化

即，A 于 $\lambda_1 = 3$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 6$，解方程组

$$(\quad 6I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

5.2 矩州的对角化

即，A 于 $\lambda_1 = 3$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 6$，解方程组

$$(\quad 6I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad !$$

5.2 矩州的对角化

即，A 于 λ_1 = 3 的线性无关的 向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

λ_2 = 6，解方程组

$$(\ 6I_3 \quad A)X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩州的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5.2 矩州的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_2 =$ 6 的线性无关的 向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩州的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_2 = 6$ 的线性无关的 向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A有3个线性无关的 向量，所以A 可以对角化.

5.2 矩州的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

即，A 于 $\lambda_2 =$ 6 的线性无关的 向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A有3个线性无关的 向量，所以A 可以对角化.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{则} P^{\ 1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

5.2 矩州的对角化

与　　向量的　干性　.

5.2 矩州的对角化

与　向量的　干性　.

定理5.6　η_1, η_2　矩州 A　于　λ_0 的　向量.对　意的$k.l$，　$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$　为矩州 A　于　λ_0 的　向量.

5.2 矩州的对角化

与 向量的 干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩州 A 于 λ_0 的 向量.对 意的$k.l$， $k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩州 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩州 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

5.2 矩州的对角化

与 向量的 干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩州 A 于 λ_0 的 向量.对 意的 $k.l$， $k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则 $k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩州 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩州 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

这 因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) =$$

5.2 矩州的对角化

与 向量的 干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩州 A 于 λ_0 的 向量.对 意的$k.l$， $k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩州 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩州 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

这 因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) = kA\eta_1 + lA\eta_2 =$$

5.2 矩州的对角化

与　　向量的　干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩州 A 于 λ_0 的 向量.对 意的 $k.l$，$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则 $k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩州 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩州 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

这 因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) = kA\eta_1 + lA\eta_2 = k\lambda_0\eta_1 + l\lambda_0\eta_2 =$$

5.2 矩州的对角化

与 向量的 干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩州 A 于 λ_0 的 向量.对 意的$k.l$， $k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩州 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩州 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

这 因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) = kA\eta_1 + lA\eta_2 = k\lambda_0\eta_1 + l\lambda_0\eta_2 = \lambda_0(k\eta_1 + l\eta_2).$$

5.2 矩阵的对角化

与 向量的 干性 .

定理5.6 η_1, η_2 矩阵 A 于 λ_0 的 向量.对 意 的$k.l$ ，$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 为矩阵 A 于 λ_0 的 向量.

即，矩阵 A 于 一个 λ_0 的 向量的非0 线性组合 λ_0 的 向量.

这 因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) = kA\eta_1 + lA\eta_2 = k\lambda_0\eta_1 + l\lambda_0\eta_2 = \lambda_0(k\eta_1 + l\eta_2).$$

于 λ 的 向量η 的非零 倍$k\eta$ 于 λ 的 向量，而 于 λ 的 向量η_1, η_2 的非零组合$k\eta_1 + l\eta_2$ 于 λ 的 向量.

5.2 矩州的对角化

所以，在例5.2 ，矩州 A 于 $\lambda_1 = 2$ 的的 部
向量

$$\left\{ k\eta_1 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} j \quad 8k \ne 0 \right\}.$$

5.2 矩州的对角化

所以，在例5.2 ，矩州 A 于 $\lambda_1 = 2$ 的的 部 向量

$$\left\{ k\eta_1 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} \mid \forall k \neq 0 \right\}.$$

于 $\lambda_2 = 3$ 的 部 向量

$$\left\{ k\eta_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \mid \forall k \neq 0 \right\}.$$

.

5.2 矩州的对角化

例5.3 ，矩州 A 于 λ_1 = 3 的 部 向量

$$\left\{ k\eta_1 + l\eta_2 = \begin{pmatrix} 2k + 2l \\ k \\ l \end{pmatrix} j \quad 8k, l \text{不} \quad \text{为} 0 \right\}.$$

5.2 矩州的对角化

例5.3 ，矩州 A 于 $\lambda_1 = 3$ 的 部 向量

$$\left\{ k\eta_1 + l\eta_2 = \begin{pmatrix} 2k + 2l \\ k \\ l \end{pmatrix} j \quad 8k, l \text{不} \quad \text{为}0 \right\}.$$

于 $\lambda_2 = 6$ 的 部 向量

$$\left\{ k\eta_3 = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} j \quad 8k \neq 0 \right\}.$$

Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com