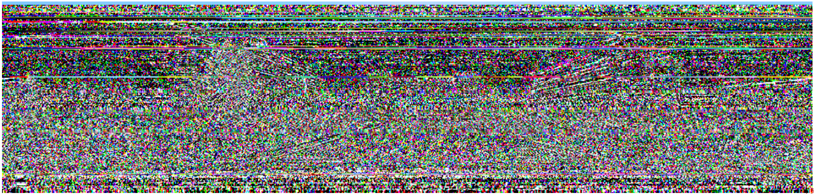
线性代

第五章：矩阵的等价、相似与 同

宿州学院 学与统计学院



目录

1 5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的　系　二次齐次多项

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad + b_{1n}x_1x_n$$
$$+ b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad + b_{2n}x_2x_n$$
$$\vdots$$
$$+ b_{n \quad 1n \quad 1}x_{n \quad 1}^2 + b_{n \quad 1n}x_{n \quad 1}x_n + b_{nn}x_n^2$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的 系 二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1; x_2; :::; x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n \ 1n \ 1}x_{n \ 1}^2 + b_{n \ 1n}x_{n \ 1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元 二次型.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的 系 二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1; x_2; :::; x_n) = \; & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n \ 1n \ 1}x_{n \ 1}^2 + b_{n \ 1n}x_{n \ 1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元 二次型.

记a_{kk}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中x_k^2项的系 ，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的　系　二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1; x_2; :::; x_n) = \ & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad\ + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad\ + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n\ 1n\ 1}x_{n\ 1}^2 + b_{n\ 1n}x_{n\ 1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元　二次型.

记a_{kk}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中x_k^2项的系　，即，$a_{kk} = b_{kk}:$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

关于字母$x_1;x_2;:::;x_n$的　系　二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1;x_2;:::;x_n) = \; & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \qquad + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \qquad + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n\;\;1n\;\;1}x_{n\;\;1}^2 + b_{n\;\;1n}x_{n\;\;1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1;x_2;:::;x_n$的n元　二次型.

记a_{kk}为$f(x_1;x_2;:::;x_n)$中x_k^2项的系　，即，$a_{kk}=b_{kk}$:

a_{ij}为$f(x_1;x_2;:::;x_n)$中交叉项 x_ix_j系　的一半，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的 系 二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1; x_2; :::; x_n) = \;& b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n\ 1n\ 1}x_{n\ 1}^2 + b_{n\ 1n}x_{n\ 1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元 二次型.

记a_{kk}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中x_k^2项的系 ，即，$a_{kk} = b_{kk}:$

a_{ij}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中交叉项 x_ix_j系 的一半，

即， $a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij};\ i < j;\ i; j = 1; 2; :::; n:$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的 系 二次齐次多项

$$
\begin{aligned}
f(x_1; x_2; :::; x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \qquad + b_{1n}x_1x_n \\
& +b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \qquad + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& +b_{n\ 1n\ 1}x_{n\ 1}^2 + b_{n\ 1n}x_{n\ 1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元 二次型.

记a_{kk}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中x_k^2项的系 ，即，$a_{kk} = b_{kk}:$

a_{ij}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$中交叉项 x_ix_j系 的一半，

即， $a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij};\ i < j;\ i; j = 1; 2; :::; n:$ 令$a_{ji} = a_{ij}$.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的　系　二次齐次多项

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \quad + b_{1n}x_1x_n$$
$$+ b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \quad + b_{2n}x_2x_n$$
$$\vdots$$
$$+ b_{n \quad 1n \quad 1}x_{n \quad 1}^2 + b_{n \quad 1n}x_{n \quad 1}x_n + b_{nn}x_n^2$$

称为关于字母$x_1; x_2; :::; x_n$的n元　二次型.

记a_{kk}为$f(x_1; x_2; :::; x_n)$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

则，A　一个n阶　对称矩阵，且由$f(x_1;x_2;:::;x_n)$的系　唯一确定.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

则，A　一个n阶　对称矩阵，且由$f(x_1;x_2;:::;x_n)$的系　唯一确定.称为二次型$f(x_1;x_2;:::;x_n)$ 的矩阵.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

则，A 一个n阶 对称矩阵，且由$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$的系 唯一确定.称为二次型$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵.

记$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \qquad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \qquad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n\ \ 1n\ \ 1}x_{n\ \ 1}^2 + (a_{n\ \ 1n} + a_{nn\ \ 1})x_{n\ \ 1}x_n + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \qquad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \qquad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n\ \ 1n\ \ 1}x_{n\ \ 1}^2 + (a_{n\ \ 1n} + a_{nn\ \ 1})x_{n\ \ 1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & f(x_1; x_2; :::; x_n) \quad :
\end{aligned}
$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& +a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& +a_{n\ 1n\ 1}x_{n\ 1}^2 + (a_{n\ 1n} + a_{nn\ 1})x_{n\ 1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & f(x_1; x_2; ::: ; x_n) \quad :
\end{aligned}
$$

把一阶方阵 a 与a等同看待，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n \ 1n \ 1}x_{n \ 1}^2 + (a_{n \ 1n} + a_{nn \ 1})x_{n \ 1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & f(x_1; x_2; ::: ; x_n) \quad :
\end{aligned}
$$

把一阶方阵 a 与a等同看待，

则$f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = X^T AX$，其中矩阵$A$为二次型的矩阵.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n \ 1n \ 1}x_{n \ 1}^2 + (a_{n \ 1n} + a_{nn \ 1})x_{n \ 1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & f(x_1; x_2; ::: ; x_n) \quad :
\end{aligned}
$$

把一阶方阵 a 与a等同看待，

则$f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = X^T AX$，其中矩阵$A$为二次型的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1,n}+a_{n,n-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & f(x_1,x_2,\cdots,x_n) .
\end{aligned}
$$

把一阶方阵 (a) 与a等同看待，

则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X^TAX$，其中矩阵$A$为二次型的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$

矩阵表示：

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$f(y_1;y_2;y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 \quad y_3^2$，矩阵表　：

$$f(y_1;y_2;y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} :$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$，矩阵表 ：

$$f(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

只含平方项的二次型

$f(y_1,y_2,\ldots,y_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 二次型中的最简形 ，用矩阵表

$$f(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题：任意给定的n元 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$，能否找到 当的可逆线性变†

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases};$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

问题　：任意给定的n元　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$，能否找到　当的可逆线性变†

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \qquad + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \qquad + c_{2n}y_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \qquad + c_{nn}y_n \end{array}\right. ;$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$成只含平方项的$g(y_1; y_2; :::; y_n)$?

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 ：任意给定的n元 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n)$，能否找到 当的可逆线性变 †

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \qquad + c_{1n}y_n \\ x_2 & = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \qquad + c_{2n}y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \qquad + c_{nn}y_n \end{array}\right. ;$$

z 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n)$成只含平方项的$g(y_1;y_2;:::;y_n)$?

£ 答 ：

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 ：任意给定的n元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$，能否找到 当的可逆线性变†

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{cases};$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$成只含平方项的$g(y_1; y_2; \dots; y_n)$?

£ 答 ：能！

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 ：任意给定的n元 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n)$，能否找到 当的可逆线性变†

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{cases};$$

z 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n)$成只含平方项的$g(y_1;y_2;:::;y_n)$?

£答 ：能！利用 对称矩阵的特性，能给出问题的答案.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

记

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

记

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{pmatrix};$$

则可逆的线性变†

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{cases}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

记

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix};$$

则可逆的线性变†

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n\\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n\\ \vdots \qquad \vdots\\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

可以表　为 $X = CY$.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

所谓可逆线性变†，指在线性变† $X = CY$ 中，每给一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，而且每给一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

所谓可逆线性变†， 指在线性变† $X = CY$ 中，每给一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，而且每给一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值.

由线性方程组的知 知道，线性变† $X = CY$ 可逆当且仅当 C 可逆矩阵.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY)$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T(C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$

$(C^T AC)^T =$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变†$X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$

$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T =$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$$

$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$　　对称矩阵，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$

$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$ 对称矩阵，即$C^T AC$ 二次型$g(y_1; y_2; :::; y_n)$的矩阵.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = X^T AX$，得

$$f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y = g(y_1; y_2; ::: ; y_n)$$

$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$ 对称矩阵，即$C^T AC$ 二次型$g(y_1; y_2; ::: ; y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$，得

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T(C^T AC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$$

$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$　　对称矩阵，即$C^T AC$

二次型$g(y_1; y_2; :::; y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

可逆线性变† $X = CY$ z $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^TAX$，得

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = (CY)^TA(CY) = Y^T(C^TAC)Y = g(y_1; y_2; :::; y_n)$$

$(C^TAC)^T = C^TA^T(C^T)^T = C^TAC$　　对称矩阵，即C^TAC 二次型$g(y_1; y_2; :::; y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可逆线性变†

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 † $X = CY$ z $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X$，得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C$ 对称矩阵，即$C^T A C$ 二次型$g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可逆线性变 †

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}，\text{即，} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原 二次型，则 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

代入原　二次型，则 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} =$

0-102(20)]TJ/F1 510.9091Tf14.430-16.259Td[(@)]TJ/F1 510.9091Tf5.4550Td[0-10

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \Big(y_3$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原二次型，则 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原二次型，则 $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原 二次型，则 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

即，可逆线性变† $\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 代入 二次型

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$,

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

z 为关于字母$y_1;y_2;y_3$ 且只含平方项的　二次型

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2:$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母$y_1;y_2;y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就 得 $Y^T(C^TAC)Y$ 只含平方项，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母$y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就 得 $Y^T(C^TAC)Y$ 只含平方项，即，求可逆矩阵C，得C^TAC为对角矩阵.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母$y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就 得 $Y^T(C^TAC)Y$只含平方项，即，求可逆矩阵C，得C^TAC为对角矩阵.

即，求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就相当于就可逆矩阵C， 得 对称矩阵A在变 † C之下， z 为对角阵 C^TAC.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

z 为关于字母$y_1;y_2;y_3$ 且只含平方项的　二次型

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2:$$

求可逆的线性变† $X = CY$ z　二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就　　得 $Y^T(C^TAC)Y$ 只含平方项，即，求可逆矩阵C，得C^TAC为对角矩阵.

即，求可逆的线性变† $X = CY$ z　二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就相当于就可逆矩阵C，　得　对称矩阵A在变†C之下，z 为对角阵 C^TAC.

因而，z　二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n) = X^TAX$为只含平方项的标准形问题，　际上就　在　同意义下，求可逆矩阵C，z 二次型的矩阵A对对角形矩阵.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变† $X = CY$ 并不唯一.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 † $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$f(x_1;\ x_2;\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

z　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 † $X = CY$ 并不唯一.

例如　二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 + y_2^2$；

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n) = X^TAX$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变† $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 + y_2^2$；

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \quad y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 \quad 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $4y_2^2 + y_3^2$；

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变† $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 + y_2^2$；

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \quad y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 \quad 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $4y_2^2 + y_3^2$；

不同的可逆线性变† z 同一个二次型的标准形可能不同，但同矩阵有相同的秩，对角阵的秩等于非零对角元的个 。

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

z　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 † $X = CY$ 并不唯一.

例如　二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \quad y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 + y_2^2$；

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \quad y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 \quad 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $4y_2^2 + y_3^2$；

不同的可逆线性变 † z 同一个二次型的标准形可能不同，但同矩阵有相同的秩，对角阵的秩等于非零对角元的个　。不同的可逆线性变 † z 同一个二次型为标准形　，非零项个　相同.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

不同的可逆线性变† z 同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个　　负项的个　　唯一确定的.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

不同的可逆线性变 † z 同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个　　负项的个　　唯一确定的.

例如　二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 2x_1x_2 \quad x_3^2 + 2x_2x_3$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

不同的可逆线性变 † z 同一个二次型，得不同的标准形，

且标准形中正项的个　　负项的个　　唯一确定的.

例如　二次型 $f(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 \quad 2x_1x_2 \quad x_3^2 + 2x_2x_3$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 \quad y_2^2$；

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

不同的可逆线性变 † z 同一个二次型，得不同的标准形，

且标准形中正项的个　　负项的个　　唯一确定的.

例如　二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 2x_1x_2 \quad x_3^2 + 2x_2x_3$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 \quad y_2^2$；

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 \quad y_3 \\ x_3 = y_1 \quad y_2 \quad y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_2^2 + y_3^2$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

不同的可逆线性变 † z 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个　　负项的个　　唯一确定的.

例如　二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 2x_1x_2 \quad x_3^2 + 2x_2x_3$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_1^2 \quad y_2^2$；

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 \quad y_3 \\ x_3 = y_1 \quad y_2 \quad y_3 \end{cases}$ 之下，z 为 $y_2^2 + y_3^2$

不同的可逆线性变 † z 同一个　二次型有两个非零平方项，
且都　一个正项、一个负项.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

对　对称矩阵A，若所求可逆矩阵C　正交矩阵，则

$$C^{\ \ 1}AC = C^TAC;$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

对　对称矩阵A，若所求可逆矩阵C　正交矩阵，则

$$C\ ^{1}AC = C^{T}AC;$$

且，　对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C\ ^{1}AC = C^{T}AC$　对角矩阵，且C的列向量　A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元　矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

对 对称矩阵A，若所求可逆矩阵C 正交矩阵，则

$$C^{\ 1}AC = C^{T}AC;$$

且， 对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C^{\ 1}AC = C^{T}AC$ 对角矩阵，且C的列向量 A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元 矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

由 例，给出求可逆的线性变†， z 二次型为标准形的步骤 方法.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

对　对称矩阵A，若所求可逆矩阵C　正交矩阵，则

$$C^{\ 1}AC = C^{T}AC;$$

且，　对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C^{\ 1}AC = C^{T}AC$　对角矩阵，且C的列向量　A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元　矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

由　例，给出求可逆的线性变†，z　二次型为标准形的步骤　方法.

例5.5　　二次型

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$$

求可逆的线性变†，z 其为标准形.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

解 二次型的矩阵

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

A的特征值 $\lambda_1 = 0$(二重)，$\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -2$.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_1 = 0$代入齐次线性方程组$(0I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为其Ä础解系，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(0I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为其 Ä 础解系, 对称矩阵 A 于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量为

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

特征值 $_1 = 0$代入齐次线性方程组$(_0 I \quad A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为其Ä础解系，对称矩阵A于特征值$_1 = 0$线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

且正交，需单位 z，得

$$\begin{pmatrix} \frac{p\overline{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{p\overline{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p\overline{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{p\overline{2}}{2} \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

特征值 $_2 = 2$代入齐次线性方程组$(I \quad A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得 Ä 础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

对于特征值 $\lambda_2 = 2$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对于特征值 $\lambda_2 = 2$的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

特征值 $_2 = 2$代入齐次线性方程组(I $A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, 得 Ä 础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

于特征值 $_2 = 2$的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位 z 得 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_3 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

特征值 $_3 = 2$代入齐次线性方程组$(\ I \quad A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得 Ä 础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

于特征值 $_3 = 2$的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

特征值 $_3$ = 2 代入齐次线性方程组 $(I \quad A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，$$

得 Ä 础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，Š特 $_3 = 2$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

构作矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

则

$$C^{-1}AC=C^{T}AC=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

则

$$C^{\ 1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

即，存在可逆的线性变† $X = CY$，代入原二次型 z 得

$$2y_3^2 \quad 2y_4^2$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 4x_1x_2 \quad 8x_1x_3 + 4x_2^2 \quad 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变†，　z 其为标准形.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

例5.6

$$g(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 \quad 4x_1x_2 \quad 8x_1x_3 + 4x_2^2 \quad 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变†， z 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

例5.6

$$g(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 \quad 4x_1x_2 \quad 8x_1x_3 + 4x_2^2 \quad 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变†，　z 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$j \quad I \quad Aj = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & & 4 \quad 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 4x_1x_2 \quad 8x_1x_3 + 4x_2^2 \quad 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变†， z 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$j \;\; I \quad Aj = \begin{array}{ccc} 1 \;\; 2 & & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} = (\quad 5)^2(\quad + 4)$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 \quad 4x_1x_2 \quad 8x_1x_3 + 4x_2^2 \quad 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变†，z 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$j \quad I \quad Aj = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\quad 5)^2(\quad + 4)$$

A的全部特征值为 $_1 = 5$(二重)， $_2 = \quad 4.$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$\lambda_1 = 5$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

$\lambda_1 = 5$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ 有基础解系 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A 于特征值 $\lambda_1 = 5$有两个线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$\lambda_1 = 5$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A 于特征值 $\lambda_1 = 5$有两个线性无关的特征向量

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， 密特正交 z 并单位 z， 得矩阵$A$ 于特征值 $\lambda_1 = 5$的两个正交的单位特征向量$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$。

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$_2 = \quad 4$代入齐次线性方程组$(\ I \quad A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$_2$ = 4代入齐次线性方程组(I A)X = 0，得

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

有Ä础解系$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，单位 z 得$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构作矩阵

$$C = \quad 0$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

则

$$C^{-1}AC = C^{T}AC = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

即，存在可逆线性变†$X = CY$，z 原二次型为

$$5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2.$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z　二次型为标准形的方法步骤.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$的矩阵，以矩阵形 表 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^TAX$；

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z　二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形　表　二次型 $f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = X^T AX$;

(2) 求　对称矩阵 A 的特征多项　，进而求出其所有的不同特征值 $_1;\ _2; \ldots;\ _s$;

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z　二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形　表　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$；

(2) 求　对称矩阵 A 的特征多项　，进而求出其所有的不同特征值 $_1;\ _2; :::;\ _s$；

(3) 将每一个特征值 $_k$ 代入齐次线性方程组(I　$A)X = 0$，求出其 Ä 础解系 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}$; $k = 1; 2; :::; s$；

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形 表 二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$;

(2) 求 对称矩阵 A 的特征多项 ，进而求出其所有的不同特征值 $_1;\ _2; :::;\ _s$;

(3) 将每一个特征值 $_k$ 代入齐次线性方程组(I $A)X = 0$，求出其Ä础解系 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}; k = 1; 2; :::; s$;

(4) 利用 密特正交 z 方法，将 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}$ 正交 z，再单位 z，得规范正交单位向量 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}; k = 1; 2; :::; s$;

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

综上，求可逆的线性变 † $X = CY$ z　二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形　表　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$；

(2) 求　对称矩阵 A 的特征多项　，进而求出其所有的不同特征值 $_1;\ _2; :::;\ _s$；

(3) 将每一个特征值 $_k$ 代入齐次线性方程组(I　$A)X = 0$，求出其 Ä 础解系 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}; k = 1; 2; :::; s$；

(4) 利用　密特正交 z 方法，将 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}$ 正交 z，再单位 z，得规范正交单位向量 $_{k1};\ _{k2}; :::;\ _{kt_k}; k = 1; 2; :::; s$；

(5) 以 $_{11};\ _{12}; :::;\ _{1t_1};\ _{21};\ _{22}; :::;\ _{2t_2}; :::;\ _{s1};\ _{s2}; :::;\ _{st_s}$ 为列向量构作矩阵 C，则 C　正交矩阵，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

且

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

且

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

(6)构作可逆线性变† $X = CY$，

则将二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z 为标准形，

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

且

$$C^T AC = C \ {}^1 AC = \begin{pmatrix} {}_1 I_{t_1} & 0 & & 0 \\ 0 & {}_2 I_{t_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & {}_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

(6)构作可逆线性变 † $X = CY$，

则将二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n)$ z 为标准形，且标准形

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = \ {}_1 y_1^2 + \quad + \ {}_1 y_{t_1}^2 + \quad + \ {}_s y_{t_1+}^2 \ {}_{+t_s} \ {}_{1+1} + \quad + \ {}_s y_n^2 :$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

取 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$,

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

取 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

取 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$，即，

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

取 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$，即，

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$，称为 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 在 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 的值.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

若对任意不全为0的$c_1; c_2; :::; c_n$，都有$f(c_1; c_2; :::; c_n) > 0$，则称　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

若对任意不全为0的$c_1; c_2; :::; c_n$，都有$f(c_1; c_2; :::; c_n) > 0$，则称　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，对应的对称矩阵A称为正定矩阵.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的$c_1; c_2; ::: ; c_n$，都有$f(c_1; c_2; ::: ; c_n) > 0$，则称 二次型 $f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = X^T A X$ 为正定二次型，对应的对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元 二次型

$$f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \quad + d_n x_n^2;$$

其正定当且仅当$d_k > 0; \ k = 1; 2; ::: ; n$.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的$c_1;c_2;:::;c_n$，都有$f(c_1;c_2;:::;c_n) > 0$，则称 二次型 $f(x_1;x_2;:::;x_n) = X^TAX$ 为**正定二次型**，对应的对称矩阵A称为**正定矩阵**.

只含平方项的n元 二次型

$$f(x_1;x_2;:::;x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \qquad + d_nx_n^2;$$

其正定当且仅当$d_k > 0;\ k = 1;2;:::;n$.

二次型$f(x_1;x_2;:::;x_n)$经可逆的线性变 † $X = CY$ z 为二次型$g(y_1;y_2;:::;y_n)$，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

若对任意不全为0的$c_1; c_2; :::; c_n$，都有$f(c_1; c_2; :::; c_n) > 0$，则称　二次型 $f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，对应的对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元　二次型

$$f(x_1; x_2; :::; x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \quad + d_n x_n^2;$$

其正定当且仅当$d_k > 0; \ k = 1; 2; :::; n$.

二次型$f(x_1; x_2; :::; x_n)$经可逆的线性变†$X = CY$ z 为二次型$g(y_1; y_2; :::; y_n)$，则

$$f(x_1; x_2; :::; x_n)\text{正定当且仅当}g(y_1; y_2; :::; y_n)\text{正定,}$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用—— 二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T A X$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; \because:; x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，　对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用—— 二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; ::: ; x_n) = X^T A X$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，　对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个　二次型　否正定，只要求出　二次型对应的　对称矩阵的特征值，

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，　对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个　二次型　否正定，只要求出　二次型对应的　对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = X^T A X$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即， 对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定，只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的½者0特征值，则不正定.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

n元二次型$f(x_1; x_2; :::; x_n) = X^T A X$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即， 对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定，只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的 ½ 者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不 正定二次型.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

n元二次型$f(x_1;x_2;:::;x_n) = X^TAX$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即， 对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定，只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的 ½ 者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不 正定二次型.

再看一个例子.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

n元二次型$f(x_1;x_2;:::;x_n) = X^TAX$正定当且仅当其对应的对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，　对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个　二次型　否正定，只要求出　二次型对应的　对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的 ½ 者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不　正定二次型.

再看一个例子.

例5.7

$$f(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2$$

三元　二次型，问t取　么值　，　正定二次型.

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

解

5.4 矩阵 同对角z的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\ I \quad A| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (\quad 2)(\ ^2 \quad 5 \quad + 4 \quad t^2)$$

5.4 矩阵　同对角 z 的应用——　二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -t & 0 \\ -t & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 2;\quad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2};\quad \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -t & 0 \\ -t & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2};\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要 得 $f(x_1;x_2;x_3)$ 正定，必须且只需 $\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$，$\frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -t & 0 \\ -t & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2};\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要使得 $f(x_1;x_2;x_3)$正定，必须且只需 $\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$，$\frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$

解得， $-2 < t < 2.$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -t & 0 \\ -t & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2};\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要使得 $f(x_1; x_2; x_3)$ 正定，必须且只需 $\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$，$\frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$

解得，$-2 < t < 2$. 即 $-2 < t < 2$ 时，$f(x_1; x_2; x_3)$ 正定.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com