

线性代

第五章：矩阵的等价、相似与 同

宿州学院 学与统计学院



目录

1 5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned}
 f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\
 & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\
 & \vdots \\
 & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
 \end{aligned}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned}
 f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\
 & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\
 & \vdots \\
 & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned}
 f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\
 & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\
 & \vdots \\
 & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中 x_k^2 项的系 ,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中 x_k^2 项的系数, 即, $a_{kk} = b_{kk}$:



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中 x_k^2 项的系 , 即, $a_{kk} = b_{kk}$:

a_{ij} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中交叉项 $x_i x_j$ 系 的一半,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中 x_k^2 项的系 , 即, $a_{kk} = b_{kk}$:

a_{ij} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中交叉项 $x_i x_j$ 系 的一半,

即, $a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij}; i < j; i, j = 1; 2; \dots; n$:



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中 x_k^2 项的系 , 即, $a_{kk} = b_{kk}$:

a_{ij} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 中交叉项 $x_i x_j$ 系 的一半,

即, $a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij}; i < j; i, j = 1; 2; \dots; n$: 令 $a_{ji} = a_{ij}$.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 系 二次齐次多项

$$\begin{aligned}
 f(x_1; x_2; \dots; x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n \\
 & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \dots + b_{2n}x_2x_n \\
 & \vdots \\
 & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
 \end{aligned}$$

称为关于字母 $x_1; x_2; \dots; x_n$ 的 n 元 二次型.

记 a_{kk} 为 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

则, A 一个 n 阶 对称矩阵, 且由 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的系 唯一确定.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

则, A 一个 n 阶 对称矩阵, 且由 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的系 唯一确定. 称为二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的矩阵.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

则, A 一个 n 阶 对称矩阵, 且由 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 的系 唯一确定. 称为二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 的矩阵.

$$\text{记 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
&= f(x_1; x_2; \dots; x_n) :
\end{aligned}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
&= f(x_1; x_2; \dots; x_n) :
\end{aligned}$$

把一阶方阵 a 与 a 等同看待,



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
&= f(x_1; x_2; \dots; x_n) :
\end{aligned}$$

把一阶方阵 a 与 a 等同看待,

则 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 其中矩阵 A 为二次型的矩阵.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
&= f(x_1; x_2; \dots; x_n) :
\end{aligned}$$

把一阶方阵 a 与 a 等同看待,

则 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 其中矩阵 A 为二次型的矩阵.

例如, 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \quad + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \quad + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
&= f(x_1; x_2; \dots; x_n) :
\end{aligned}$$

把一阶方阵 a 与 a 等同看待,

则 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 其中矩阵 A 为二次型的矩阵.

例如, 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$

矩阵表 :

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} & & & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & & x_1 \\ & & & 1 & 2 & 2 & & C \\ & & & 1 & 2 & 3 & & x_3 \end{matrix} \\
&f(x_1; x_2; x_3) = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ A \\ A \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$





5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$f(y_1; y_2; y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$, 矩阵表 :

$$f(y_1; y_2; y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$f(y_1; y_2; y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2, \text{ 矩阵表 :}$$

$$f(y_1; y_2; y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

只含平方项的二次型

$$f(y_1; y_2; \dots; y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2 \quad \text{二次型中的最简形, 用矩阵表}$$

$$f(y_1; y_2; \dots; y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 : 任意给定的 n 元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, 能否找到 当的可逆线性变 +

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{8} \\ \text{xxx} \\ \text{xxx} \\ \text{xxx} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \\ \vdots \\ x_n = \end{matrix} & \begin{matrix} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + & + c_{1n}y_n \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + & + c_{2n}y_n \\ \vdots & \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + & + c_{nn}y_n \end{matrix} ; \end{aligned}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 : 任意给定的 n 元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, 能否找到 当的可逆线性变 +

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{8} \\ \text{xxx} \end{matrix} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} \vdots &\quad \vdots \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{aligned} ;$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 成只含平方项的 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$?



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 : 任意给定的 n 元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, 能否找到 当的可逆线性变 +

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{8} \\ \text{xxx} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + & + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + & + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} \text{xxx} \\ \cdot \end{matrix} x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + & + c_{nn}y_n \end{matrix} ; \end{aligned}$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 成只含平方项的 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$?

£ 答 :



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 : 任意给定的 n 元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, 能否找到 当的可逆线性变 +

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{8} \\ \text{xxx} \end{matrix} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} \vdots &\quad \vdots \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{aligned} ;$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 成只含平方项的 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$?

£ 答 : 能!



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

问题 : 任意给定的 n 元 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, 能否找到 当的可逆线性变 +

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{8} \\ \text{xxx} \end{matrix} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \quad + c_{1n}y_n \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \quad + c_{2n}y_n \\ \vdots & \\ \begin{matrix} \text{xxx} \end{matrix} x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \quad + c_{nn}y_n \end{aligned} ;$$

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 成只含平方项的 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$?

£ 答 : 能! 利用 对称矩阵的特性, 能给出问题的答案.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix};$$

则可逆的线性变十

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix};$$

则可逆的线性变十

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

可以表 为 $X = CY$.

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

所谓可逆线性变 τ , 指在线性变 $\tau: X \rightarrow Y$ 中, 每给一

组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值, 都能唯一确定一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值, 而且每

给一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值, 都能唯一确定一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

所谓可逆线性变换，指在线性变换 $X = CY$ 中，每给一

组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，而且每

给一组 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的值，都能唯一确定一组 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的值。

由线性方程组的知识知道，线性变换 $X = CY$ 可逆当且仅当 C 可逆矩阵。



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变换 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY)$$





5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变换 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变 $X = CY$ $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T =$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T =$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变换 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C \quad \text{对称矩阵,}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

可逆线性变换 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C \quad \text{对称矩阵, 即 } C^T A C$$

二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$ 的矩阵.



5.4 矩阵 同对角化 的应用—— 二次型

可逆线性变换 $X = CY$ 且 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C \quad \text{对称矩阵, 即 } C^T A C$$

二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$ 的矩阵.

例如, 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 $X = CY$ 及 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C \quad \text{对称矩阵, 即 } C^T A C$$

二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$ 的矩阵.

例如, 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$



$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC \quad \text{对称矩阵, 即 } C^T AC$$

二次型 $g(y_1; y_2; \cdots; y_n)$ 的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

			1	1	1	x_1
x_1	x_2	x_3	B	1	2	A
			@	1	2	A
				1	2	3
						x_3

8 可逆线性变 +

$$\succeq \quad x_1 = y_1 \quad y_2$$

$$x_2 = y_2 y_3,$$

$$x_3 = y_3$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

可逆线性变 $X = CY$ 及 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$, 得

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C \quad \text{对称矩阵, 即 } C^T A C$$

二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$ 的矩阵.

例如, 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = 0x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{可逆线性变 } & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ \text{即, } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

代入原 二次型, 则 $x_1 \ x_2 \ x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$


5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原二次型, 则 $x_1 \ x_2 \ x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$y_1 \ y_2 \ y_3$

5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原 二次型, 则 $x_1 \ x_2 \ x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

代入原 二次型, 则 $x_1 \ x_2 \ x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$$\text{代入原二次型, 则 } x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_1 \\ B & C & B & C \\ @1 & 2 & 2 & @x_2 & A \end{matrix} =$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \begin{matrix} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B @ & 1 & 1 & 0 & A @ & 1 & 2 & 2 & A @ & 0 & 1 & 1 & A @ & y_2 & A = \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & y_3 \end{matrix}$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad @0 \quad 1 \quad 0 \quad \text{C} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{A} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$0 \quad 0 \quad 1_8 \quad y_3$$

$$\succeq x_1 = y_1 \quad y_2$$

、 $x_2 = y_2 - y_3$ 代入 二次型

$$x_3 = y_3$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母 $y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母 $y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 $X = CY$ z 二次型 $X^T A X$ 为只含平方项的标准形, 就 得 $Y^T (C^T A C) Y$ 只含平方项,



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母 $y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 $X = CY$ z 二次型 $X^T A X$ 为只含平方项的标准形, 就 得 $Y^T (C^T A C) Y$ 只含平方项, 即, 求可逆矩阵 C , 得 $C^T A C$ 为对角矩阵.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母 $y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 $\dagger X = CY$ z 二次型 $X^T A X$ 为只含平方项的标准形, 就 得 $Y^T (C^T A C) Y$ 只含平方项, 即, 求可逆矩阵 C , 得 $C^T A C$ 为对角矩阵.

即, 求可逆的线性变 $\dagger X = CY$ z 二次型 $X^T A X$ 为只含平方项的标准形, 就相当于就可逆矩阵 C , 得 对称矩阵 A 在变 $\dagger C$ 之下, z 为对角阵 $C^T A C$.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 为关于字母 $y_1; y_2; y_3$ 且只含平方项的 二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2:$$

求可逆的线性变 $\dagger X = CY$ z 二次型 X^TAX 为只含平方项的标准形, 就 得 $Y^T(C^TAC)Y$ 只含平方项, 即, 求可逆矩阵 C , 得 C^TAC 为对角矩阵.

即, 求可逆的线性变 $\dagger X = CY$ z 二次型 X^TAX 为只含平方项的标准形, 就相当于就可逆矩阵 C , 得 对称矩阵 A 在变 $\dagger C$ 之下, z 为对角阵 C^TAC .

因而, z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^TAX$ 为只含平方项的标准形问题, 实际上就 在 同意义下, 求可逆矩阵 C , z 二次型的矩阵 A 对对角形矩阵.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

λ 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 $X = C Y$ 并不唯一.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

λ 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 $X = C Y$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

λ 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变换 $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$\geq x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3$$

在 $\begin{cases} x_2 = y_2 & y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下, λ 为 $y_1^2 + y_2^2$;



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$\geq x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3$$

在 $\begin{matrix} > \\ > \end{matrix} \begin{matrix} x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{matrix}$ 之下, z 为 $y_1^2 + y_2^2$;

$$\cdot \begin{matrix} 8 \\ > \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = y_1 \end{matrix}$$

在 $\begin{matrix} > \\ > \end{matrix} \begin{matrix} x_2 = y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{matrix}$ 之下, z 为 $4y_2^2 + y_3^2$;

$$\cdot \begin{matrix} x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{matrix}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

z 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 $X = CY$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$\geq x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3$$

在 $\begin{matrix} & x_2 = y_2 & y_3 \end{matrix}$ 之下, z 为 $y_1^2 + y_2^2$;

$$\cdot x_3 = y_3$$

$$\geq x_1 = y_1$$

在 $\begin{matrix} & x_2 = & y_1 + 2y_2 \end{matrix}$ 之下, z 为 $4y_2^2 + y_3^2$;

$$\cdot x_3 = y_1 \quad 2y_2 + y_3$$

不同的可逆线性变 z 同一个二次型的标准形可能不同, 但同矩阵有相同的秩, 对角阵的秩等于非零对角元的个数。



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

λ 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为只含平方项的标准形的可逆线性变 $X = C Y$ 并不唯一.

例如 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$\geq x_1 = y_1 \quad y_2 + y_3$$

在 $\begin{matrix} & x_2 = y_2 & y_3 \end{matrix}$ 之下, λ 为 $y_1^2 + y_2^2$;

$$\cdot x_3 = y_3$$

$$\geq x_1 = y_1$$

在 $\begin{matrix} & x_2 = y_1 + 2y_2 \end{matrix}$ 之下, λ 为 $4y_2^2 + y_3^2$;

$$\cdot x_3 = y_1 \quad 2y_2 + y_3$$

不同的可逆线性变 λ 同一个二次型的标准形可能不同, 但同矩阵有相同的秩, 对角阵的秩等于非零对角元的个数。不同的可逆线性变 λ 同一个二次型为标准形, 非零项个数相同.

5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

不同的可逆线性变换 λ 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个数 负项的个数 唯一确定的.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

不同的可逆线性变换 λ 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个数 负项的个数 唯一确定的.

例如 二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

不同的可逆线性变换 z 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个数 负项的个数 唯一确定的.

例如 二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$
 $\geq x_1 = y_1 + y_2 + y_3$
 在 $\begin{cases} x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下， z 为 $y_1^2 - y_2^2$;



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

不同的可逆线性变 z 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个 负项的个 唯一确定的.

例如 二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{matrix}$$

在 $\begin{matrix} > \\ \cdot \end{matrix}$ 之下， z 为 $y_1^2 - y_2^2$;

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{matrix}$$

在 $\begin{matrix} > \\ \cdot \end{matrix}$ 之下， z 为 $y_2^2 + y_3^2$

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{matrix}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

不同的可逆线性变 z 同一个二次型，得不同的标准形，
且标准形中正项的个 负项的个 唯一确定的.

例如 二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{matrix}$$

在 $\begin{matrix} > \\ \cdot \end{matrix}$ 之下， z 为 $y_1^2 - y_2^2$;

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{matrix}$$

在 $\begin{matrix} > \\ \cdot \end{matrix}$ 之下， z 为 $y_2^2 + y_3^2$

$$\begin{matrix} 8 \\ \geq \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{matrix}$$

不同的可逆线性变 z 同一个 二次型有两个非零平方项，
且都 一个正项、一个负项.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

对 对称矩阵 A ，若所求可逆矩阵 C 正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^TAC;$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

对 对称矩阵 A ，若所求可逆矩阵 C 正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^T AC;$$

且， 对称矩阵 A ，存在正交矩阵 C ，得 $C^{-1}AC = C^T AC$ 对角矩阵，且 C 的列向量 A 的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元 矩阵 C 的列作为特征向量对应的特征值.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

对 对称矩阵 A ，若所求可逆矩阵 C 正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^T AC;$$

且， 对称矩阵 A ，存在正交矩阵 C ，得 $C^{-1}AC = C^T AC$ 对角矩阵，且 C 的列向量 A 的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元 矩阵 C 的列作为特征向量对应的特征值.

由 例，给出求可逆的线性变 λ ， λ 二次型为标准形的步骤 方法.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

对 对称矩阵 A ，若所求可逆矩阵 C 正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^TAC;$$

且， 对称矩阵 A ，存在正交矩阵 C ，得 $C^{-1}AC = C^TAC$ 对角矩阵，且 C 的列向量 A 的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元 矩阵 C 的列作为特征向量对应的特征值.

由 例，给出求可逆的线性变 λ ， λ 二次型为标准形的步骤 方法.

例5.5 二次型

$$f(x_1; x_2; x_3; x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$$

求可逆的线性变 λ ， λ 其为标准形.







5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型的矩阵





5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^4 + 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda^2 - 2) = -\lambda^2(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$$

A的特征值 $\lambda_1 = 0$ (二重), $\lambda_2 = \sqrt{2}$; $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(0I - A)x = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 为其 } \Lambda \text{ 基础}$$

解系,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(0I - A)x = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 为其 } \tilde{A} \text{ 基础}$$

解系, 对称矩阵 A 于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量为



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(0I - A)x = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 为其 } \lambda_1 \text{ 基础}$$

解系， 对称矩阵 A 于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{且正交, 需单位 } z, \quad \text{得} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$


5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系}$$

于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量为

5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于特征值 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量为

单位 λ 得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

0 特征值 $\lambda_3 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(I - A)X_0 = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \ddot{A} \text{ 基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于特征值 $\lambda_3 = 2$ 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

特征值 $\lambda_3 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \text{基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 特征值 } \lambda_3 = 2.$$


5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构造矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{p_2}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{p_2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

构造矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{p_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

则

$$C^{-1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构造矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

则

$$C^{-1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

即，存在可逆的线性变换 $X = CY$ ，代入原二次型 z 得

$$2y_3^2 + 2y_4^2$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变 $\mathbf{t}$, z 其为标准形.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变 $\mathbf{t}$ ， $\mathbf{z}$ 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变 $\mathbf{t}$, $\mathbf{z}$ 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A的特征多项

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变换 λ , λ 其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A 的特征多项

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4)$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

例5.6

$$g(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2;$$

求可逆的线性变换 $\mathbf{z}$ 使其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A 的特征多项

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4)$$

A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 5$ (二重), $\lambda_2 = -4$.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

代入齐次线性方程组 $(I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_1 I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对于特征值 $\lambda_2 = -1$ 有两个线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对于特征值 $\lambda_1 = 5$ 有两个线性无关的特征向量

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 密特正交 λ 并单位 λ , 得矩阵 A 于特征

值 $\lambda_1 = 5$ 的两个正交的单位特征向量 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$\lambda_2 = -4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_2 I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$\lambda_2 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_2 I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 单位 λ 得 $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构造矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{5} & \frac{4p}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{p}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4p}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

构造矩阵

0

$C =$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

构造矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{5} & \frac{4p}{5} & 1 \\ \frac{p}{5} & \frac{2p}{5} & \frac{2p}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{4p}{5} & \frac{2p}{5} & \frac{1p}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} A;$$

则

$$C^{-1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} A;$$

即，存在可逆线性变换 $X = CY$ ，z 原二次型为

$$5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2;$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 $\begin{cases} X \\ Y \end{cases} = CY \begin{cases} \lambda \\ \mu \end{cases}$ 二次型为标准形的方法步骤.



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 $\dagger X = CY z$ 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形 表 二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n) = X^T A X$;



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 $\dagger X = CY z$ 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形 表 二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n) = X^T A X$;

(2) 求 对称矩阵 A 的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值 $\lambda_1; \lambda_2; \cdots; \lambda_s$;



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变 $\dagger X = CY z$ 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形 表 二次型 $f(x_1; x_2; \cdots; x_n) = X^T A X$;

(2) 求 对称矩阵 A 的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值 $\lambda_1; \lambda_2; \cdots; \lambda_s$;

(3) 将每一个特征值 λ_k 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ ，求出其 基础解系 $\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \cdots; \alpha_{kt_k}; k = 1; 2; \cdots; s$;



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变换 $X = CY$ 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形式表 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$;

(2) 求 对称矩阵 A 的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值 $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_s$;

(3) 将每一个特征值 λ_k 代入齐次线性方程组 $(\lambda_k I - A)X = 0$ ，求出其基础解系 $\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \dots; \alpha_{kt_k}; k = 1; 2; \dots; s$;

(4) 利用 施密特正交化方法，将 $\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \dots; \alpha_{kt_k}$ 正交化，再单位化，得规范正交单位向量 $\beta_{k1}; \beta_{k2}; \dots; \beta_{kt_k}; k = 1; 2; \dots; s$;



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

综上，求可逆的线性变换 $X = CY$ 二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 的矩阵，以矩阵形式表 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$;

(2) 求 对称矩阵 A 的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值 $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_s$;

(3) 将每一个特征值 λ_k 代入齐次线性方程组 $(\lambda_k I - A)X = 0$ ，求出其基础解系 $\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \dots; \alpha_{kt_k}; k = 1; 2; \dots; s$;

(4) 利用 施密特正交化方法，将 $\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \dots; \alpha_{kt_k}$ 正交化，再单位化，得规范正交单位向量 $\beta_{k1}; \beta_{k2}; \dots; \beta_{kt_k}; k = 1; 2; \dots; s$;

(5) 以 $\beta_{11}; \beta_{12}; \dots; \beta_{1t_1}; \beta_{21}; \beta_{22}; \dots; \beta_{2t_2}; \dots; \beta_{s1}; \beta_{s2}; \dots; \beta_{st_s}$ 为列向量构成矩阵 C ，则 C 正交矩阵，



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

且

$$C^T A C = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} 0 & 1/t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2/t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} A; \quad s/t_s$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

且

$$C^T A C = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} 0 & 1/t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2/t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s/t_s \end{pmatrix};$$

(6) 构造可逆线性变换 $X = CY$,则将二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 化为标准形, 且标准形

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{t-1}^2 + y_t^2 + \cdots + y_n^2;$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

$$\text{取 } \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases},$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

$$\begin{array}{l}
 \text{取} \begin{array}{l} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{array}, \text{ 即, } \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} = \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{array}, \text{ 将其带入到二次型}
 \end{array}$$

中, 得二次型的值 $f(c_1; c_2; \dots; c_n)$,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

取 $\begin{matrix} 8 \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{matrix}$, 即, $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \\ \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} & \text{\\} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}$, 将其带入到二次型

中，得二次型的值 $f(c_1; c_2; \dots; c_n)$ ，即，

$$f(c_1; c_2; \dots; c_n) = \begin{matrix} & c_1 \\ c_1 & \text{---} & c_2 \\ & c_2 \\ & \vdots \\ c_n & \text{---} & c_n \end{matrix} A,$$



5.4 矩阵 同对角 z 的应用—— 二次型

取
$$\begin{matrix} 8 \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \cdot \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{matrix}, \text{ 即, } \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{\\} & x_1 & & \\ \text{\\} & x_2 & & \\ @ & \vdots & & \\ & x_n & & \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 & & & \\ c_2 & & & \\ @ & \vdots & & \\ c_n & & & \end{matrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}, \text{ 将其带入到二次型}$$

中, 得二次型的值 $f(c_1; c_2; \dots; c_n)$, 即,
$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ & c_1 \\ \text{\\} & c_2 \\ & \vdots \\ c_n & \end{matrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}, \text{ 称为 二次}$$

$$f(c_1; c_2; \dots; c_n) = \begin{matrix} c_1 & c_2 & & c_n \end{matrix} A \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}, \text{ 称为 二次}$$

型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 在
$$\begin{matrix} 8 \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \cdot \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{matrix} \text{ 的值.}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的 $c_1; c_2; \dots; c_n$, 都有 $f(c_1; c_2; \dots; c_n) > 0$,
则称 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为**正定二次型**,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的 $c_1; c_2; \dots; c_n$, 都有 $f(c_1; c_2; \dots; c_n) > 0$, 则称 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为**正定二次型**, 对应的对称矩阵 A 称为**正定矩阵**.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的 $c_1; c_2; \dots; c_n$, 都有 $f(c_1; c_2; \dots; c_n) > 0$, 则称 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为**正定二次型**, 对应的对称矩阵 A 称为**正定矩阵**.

只含平方项的 n 元 二次型

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2;$$

其正定当且仅当 $d_k > 0; k = 1; 2; \dots; n$.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的 $c_1; c_2; \dots; c_n$, 都有 $f(c_1; c_2; \dots; c_n) > 0$, 则称 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为**正定二次型**, 对应的对称矩阵 A 称为**正定矩阵**.

只含平方项的 n 元 二次型

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2;$$

其正定当且仅当 $d_k > 0; k = 1; 2; \dots; n$.

二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$ 为二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

若对任意不全为0的 $c_1; c_2; \dots; c_n$, 都有 $f(c_1; c_2; \dots; c_n) > 0$, 则称 二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 为**正定二次型**, 对应的对称矩阵 A 称为**正定矩阵**.

只含平方项的 n 元 二次型

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2;$$

其正定当且仅当 $d_k > 0; k = 1; 2; \dots; n$.

二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$ 为二次型 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$, 则

$f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ 正定当且仅当 $g(y_1; y_2; \dots; y_n)$ 正定,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值,



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值, 若特征值全大于0, 则二次型正定;



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值, 若特征值全大于0, 则二次型正定; 若特征值中存在负的 $\frac{1}{2}$ 者0特征值, 则不正定.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 是否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值, 若特征值全大于0, 则二次型正定; 若特征值中存在负的 $\neq 0$ 特征值, 则不正定.

例如, 例5.5、例5.6所给二次型都不 正定二次型.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值, 若特征值全大于0, 则二次型正定; 若特征值中存在负的 $\frac{1}{2}$ 者0特征值, 则不正定.

例如, 例5.5、例5.6所给二次型都不 正定二次型.

再看一个例子.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

n 元二次型 $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = X^T A X$ 正定当且仅当其对应的对称矩阵 A 的特征值全大于0.

即, 对称矩阵 A 正定, 当且仅当矩阵 A 的特征值全大于0.

判断一个 二次型 否正定, 只要求出 二次型对应的 对称矩阵的特征值, 若特征值全大于0, 则二次型正定; 若特征值中存在负的 $\frac{1}{2}$ 者0特征值, 则不正定.

例如, 例5.5、例5.6所给二次型都不 正定二次型.

再看一个例子.

例5.7

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2$$

三元 二次型, 问 t 取 么值 , 正定二次型.



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 4 & 0 \\ t & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -t & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -t & 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 4 & 0 \\ t & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 1 & t-\lambda & 4 & 0 \\ t & 4 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(t-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) - 2(1-t)(t-\lambda) = \lambda^4 - (t+5)\lambda^3 + 4t\lambda^2 - 2(t-1)\lambda$$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ t & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 1 & t - \lambda & 0 & 0 \\ t & 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(t - \lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 4t\lambda = \lambda^4 - (t+4)\lambda^3 + 4t\lambda^2$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{9 + 4t^2}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{9 + 4t^2}}{2}$



5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ t & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 1 & t-\lambda & 0 & 0 \\ t & 4-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(t-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) = \lambda^4 - (t+4)\lambda^3 + 4t\lambda^2 - 2\lambda$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{9+4t^2}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{9+4t^2}}{2}$

要 得 $f(x_1; x_2; x_3)$ 正定, 必须且只需

$$\frac{5 + \sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$$

$$\frac{5 - \sqrt{9+4t^2}}{2} > 0$$


5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ t & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 1 & t-\lambda & 0 & 0 \\ t & 4-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4 - t^2)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{9+4t^2}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{9+4t^2}}{2}$

要 得 $f(x_1; x_2; x_3)$ 正定, 必须且只需

解得, $2 < t < 2$.

5.4 矩阵 同对角 λ 的应用—— 二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ t & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征多项

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 1 & t-\lambda & 0 & 0 \\ t & 4-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda - 2) = \lambda^4(2 + \lambda)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$; $\lambda_4 = -2$

要 得 $f(x_1; x_2; x_3)$ 正定, 必须且只需

解得, $2 < t < 2$. 即 $2 < t < 2$, $f(x_1; x_2; x_3)$ 正定.

Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

