

线性代数

第三讲：向量空间

习题解答

宿²学 数学与统计学



目录

1 习题3.3



习题3.3(P_{115} P_{118})

1.解



习题3.3(P_{115} P_{118})

1.解







习题3.3(P_{115} P_{118})

1.解 (1)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

有 $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$, 但也有 $(-1) \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$,
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

存在 3 不全为 0 的数 $1, 1, 0$, 使得

$$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0;$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

1.解 (1)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

有 $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$, 但也有 $(-1) \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$,
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

存在 3 不全为 0 的数 $1, 1, 0$, 使得

$$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0;$$

而 $(-1) \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$,



习题3.3(P_{115} P_{118})

1.解 (1)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

有 $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$, 但也有 $(-1) \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$,
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

存在 3 不全为 0 的数 $1, 1, 0$, 使得

$$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0;$$

而 $(-1) \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

习题3.3(P_{115} P_{118})

(3)如

$$1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(3)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

存在 $k_1 = 1; k_2 = -1$, 使得

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0;$$

但 $\alpha_1; \alpha_2$ 线性无关, $\alpha_3; \alpha_4$ 也线性无关.

习题3.3(P_{115} P_{118})

(4)如

$${}_1 = \begin{matrix} & 2 \\ & 0 \end{matrix}^! ; \quad {}_2 = \begin{matrix} & 1 \\ & 0 \end{matrix}^! ; \quad {}_1 = \begin{matrix} & 1 \\ 2 & \end{matrix}^! ; \quad {}_2 = \begin{matrix} & 2 \\ 4 & \end{matrix}^! ;$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(4)如

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

满足 • 有 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 等式

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0;$$

成立.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(4)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

满足 • 有 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 等式

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0;$$

成立.

但 α_1, α_2 线性相关, α_3, α_4 也线性相关.

习题3.3(P_{115} P_{118})

(5)如

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ B \ C \\ @1A; \\ 0 \end{array} &
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ B \ C \\ @1A; \\ 0 \end{array} &
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ B \ C \\ @0A; \\ 0 \end{array} &
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ B \ C \\ @0A; \\ 1 \end{array} &
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ B \ C \\ @1A; \\ 0 \end{array} &
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ B \ C \\ @1A; \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(5)如

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 1 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

$1; 2; 3$ 线性相关, $1; 2; 3$ 也线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(5)如

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 1 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

$1; 2; 3$ 线性相关, $1; 2; 3$ 也线性相关.

但使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0; k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$ 同时成立, 必须 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(5)如

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad _2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad _3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad _1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad _2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad _3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$_1; _2; _3$ 线性相关, $_1; _2; _3$ 也线性相关.

但使得 $k_1 _1 + k_2 _2 + k_3 _3 = 0; k_1 _1 + k_2 _2 + k_3 _3 = 0$ 同时成立, 必须 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(6)如

$$_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad _2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad _3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(5)如

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 1 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 1 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \\ \textcircled{B} \textcircled{C} \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 也线性相关.

但使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0; k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 同时成立, 必须 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(6)如

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} ! \\ 0 \\ 1 \end{array} & ; & \begin{array}{c} ! \\ 1 \\ 0 \end{array} & ; & \begin{array}{c} ! \\ 0 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, 但 α_1 不能由 $\alpha_2; \alpha_3$ 线性表出.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(7)如

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(7)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $f_1; f_2; f_3$ 是 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的延伸组, $f_1; f_2; f_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关.





习题3.3(P_{115} P_{118})

(7)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha; \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha; \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha$$

 $f_1; f_2; f_3$ 是 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的延伸组, $f_1; f_2; f_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关.

2.解 (1)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(7)如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & C \\ @ & 1 \end{pmatrix} A; f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & C \\ @ & 0 \end{pmatrix} A; f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & C \\ @ & 0 \end{pmatrix} A$$

 $f_1; f_2; f_3$ 是 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的延伸组, $f_1; f_2; f_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关.2.解 (1)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ @ & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ @ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C;$$

 A 的阶梯形有3个主元, 等于向量个数, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关.

习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形有 2 个主元, 小于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形有 2 个主元, 小于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形 $\neq$ 有 2 个 $\neq$, 小于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(2) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形 $\neq$ 有 2 个 $\hat{1}$, 小于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形 $\neq$ 有 3 个 $\hat{1}$, 等于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(3)另解 记

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关且是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 缩短组, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(4) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是4个3维向量, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

3.解



习题3.3(P_{115} P_{118})

3.解 (1)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

3.解 (1)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

3.解 (1) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

A 的阶梯形有 3 个主元, 等于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

3.解 (1)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 的阶梯形有 3 个主元, 等于向量个数, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关.

(2)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形 $\mathbb{A}$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\vec{v}$ ，小于向量个数， $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4$ 线性
相关.且 $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形有3个主元，小于向量个数， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(3)以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A ，并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 13 & 6 \\ 2 & 7 & 20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -10 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关.且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(3)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 为列构造矩阵 A ，并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 13 & 6 \\ 2 & 7 & 20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B C A C A



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关.且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(3)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 为列构造矩阵 A ，并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 13 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 20 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

! $\begin{matrix} B \\ @ \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} A \\ A \\ A \end{matrix}$

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关. 且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(3)以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 为列构造矩阵 A ，并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 13 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 20 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ @ \\ C \\ A \end{matrix}$$

A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\dot{1}$ ，小于向量个数， $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性相关. 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + (-2)\alpha_2 + 0\alpha_4$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

4.解





习题3.3(P_{115} P_{118})

4.解 以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & t & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & t & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t(3-t)}{5} + 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

4. 解 以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & t & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & t & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t(3-t)}{5} + 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, 所以 A 的阶梯形矩阵的非零行个数小于 3, 从而 $\frac{t(3-t)}{5} + 2 = 0$, $t = 5$ 或 $t = -2$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

4.解 以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & t & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

4.解 以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & t & 2 & t \\ 2 & 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

4.解 以向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{t(3-t)}{5} + 2 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, 所以 A 的阶梯形矩阵的非零行数小于3, 从而 $\frac{t(3-t)}{5} + 2 = 0$, $t = 5$ 或 $t = -2$.

5.解 (1) 以 $\alpha_1; \alpha_2$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & a \\ a+1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & a+4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有1个0, α_1, α_2 线性相关;



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性相
关;

当 $a \neq 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性无
关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性相关;

当 $a \neq 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性无关.

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C} A$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性相关;

当 $a \neq 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 线性无关.

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & a & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a \\ 0 & 0 & 3-2a \end{pmatrix} \begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有1个1, α_1, α_2 线性相关;

当 $a \neq 4$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有2个1, α_1, α_2 线性无关.

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & a+4 & a \\ 0 & 0 & 3-2a \end{pmatrix}$$

若 $a = 4$ 或 $a = \frac{2}{3}$ 时, A 的阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有2个1, 小于向量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;



习题3.3(P_{115} P_{118})

当 $a = 4$ 时, A 的阶梯形矩 阵 有1个 1, α_1, α_2 线性相
关;

当 $a \neq 4$ 时, A 的阶梯形矩 阵 有2个 1, α_1, α_2 线性无
关.

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩 阵 A , 并对 A 实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & a & a \\ a+1 & 2 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a & a \\ 0 & 0 & 3 & 2a \end{pmatrix}$$

若 $a = 4$ 或 $a = \frac{2}{3}$ 时, A 的阶梯形矩 阵 有2个 1, 小于向
量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

若 $a \neq 4$ 且 $a \neq \frac{2}{3}$ 时, A 的阶梯形矩 阵 有3个 1, 等于向
量个数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

习题3.3(P_{115} P_{118})

(3) 由于 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 是4个三维向量，所以无论 a 取什么值，它们都是线性相关的.



习题3.3(P_{115} P_{118})

(3) 由于 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 是4个三维向量，所以无论 a 取什么值，它们都是线性相关的.

6.解











习题3.3(P_{115} P_{118})

(3) 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是4个三维向量，所以无论 a 取什么，它 都是线性相关的。

6.解 考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0$ ，
 由于 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ ， $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$ ，
 所以

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 &= x_1(2\alpha_2 - \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + \alpha_3) + x_3(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (2x_1 + x_2 + x_3)\alpha_1 + (-x_1 + x_2 + x_3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

所以

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0, \quad (2x_1 + x_2 + x_3)\alpha_1 + (-x_1 + x_2 + x_3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 = 0$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(3) 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是4个三维向量, 所以无论 a 取什么, 它们都是线性相关的.

6. 解 考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0$,
 由于 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$,
 所以

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 &= x_1(2\alpha_2 - \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + \alpha_3) + x_3(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

所以

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0, \quad (2x_1 + x_2 - x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\alpha_3 = 0$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

(3) 由于 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 是4个三维向量, 所以无论 a 取什么, 它 都是线性相关的.

6. 解 考虑 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的线性组合 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0$,
 由于 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$,
 所以

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 &= x_1(2\alpha_2 - \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + \alpha_3) + x_3(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

所以

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0, \quad (2x_1 + x_2 - x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\alpha_3 = 0$$

令 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (), K 使得 () 成立的 $x_1; x_2; x_3$,

必有 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0$ 成立.



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，所以存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 = 0$ 成立，



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，所以存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 成立，
所以 $x_1; x_2; x_3$ 线性相关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，所以存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 成立，
所以 $x_1; x_2; x_3$ 线性相关.

7. y



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，所以存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 成立，
所以 $x_1; x_2; x_3$ 线性相关.

7. y 考虑向量组 $x_1 + 2x_2; x_2 + 2x_3; x_3 + 2x_1$ 的线性组合

$$x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(x_2 + 2x_3) + x_3(x_3 + 2x_1) = 0;$$

$$\text{即} (x_1 + 2x_3)x_1 + (2x_1 + x_2)x_2 + (2x_2 + x_3)x_3 = 0,$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

而()是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得()成立，所以存在不全为0的 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 成立，

所以 $x_1; x_2; x_3$ 线性相关.

7. y 考虑向量组 $x_1 + 2x_2; x_2 + 2x_3; x_3 + 2x_1$ 的线性组合

$$x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(x_2 + 2x_3) + x_3(x_3 + 2x_1) = 0;$$

即 $(x_1 + 2x_3)x_1 + (2x_1 + x_2)x_2 + (2x_2 + x_3)x_3 = 0$,

由于 $x_1; x_2; x_3$ 线性无关，所以

$$\begin{aligned} (x_1 + 2x_3)x_1 + (2x_1 + x_2)x_2 + (2x_2 + x_3)x_3 = 0 \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad () \end{aligned}$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形矩 有3个1, 等于未知量个数, () 有0解,



习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

A 的阶梯形矩 有3个主元, 等于未知量个数, () 有0解, 即
 有当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, ()才成立,



习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix};$$

A的阶梯形矩 有3个主元, 等于未知量个数, () 有0解, 即

• 有当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, ()才成立,

即, • 有当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, 才有

$$x_1(-1 + 2 \cdot 2) + x_2(-2 + 2 \cdot 3) + x_3(-3 + 2 \cdot 1) = 0$$

成立,



习题3.3(P_{115} P_{118})

()是关于 $x_1; x_2; x_3$ 的齐次线性方程组, 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix};$$

A的阶梯形矩 有3个主元, 等于未知量个数, () 有0解, 即

• 有当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, ()才成立,

即, • 有当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, 才有

$$x_1(-1 + 2 \cdot 2) + x_2(-2 + 2 \cdot 3) + x_3(-3 + 2 \cdot 1) = 0$$

成立, 所以 $-1 + 2 \cdot 2; -2 + 2 \cdot 3; -3 + 2 \cdot 1$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

8.解







习题3.3(P_{115} P_{118})

8.解 因为

$$(x_1 + x_2) + (-1)(x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + (-1)(x_4 + x_1) = 0$$

所以 $x_1 + x_2$; $x_2 + x_3$; $x_3 + x_4$; $x_4 + x_1$ 线性相关.

9. y



习题3.3(P_{115} P_{118})

8.解 因为

$$(1 + 2) + (-1)(2 + 3) + (3 + 4) + (-1)(4 + 1) = 0$$

所以 $1 + 2; 2 + 3; 3 + 4; 4 + 1$ 线性相关.

9. y 考虑向量组 $1; 1 + 2; \dots; 1 + 2 + \dots + s$ 的线性组合 $x_1(1 + 2) + \dots + x_s(1 + 2 + \dots + s) = 0$,
即 $(x_1 + x_2 + \dots + x_s)1 + (x_2 + \dots + x_s)2 + \dots + x_s s = 0$



习题3.3(P_{115} P_{118})

8.解 因为

$$(1 + 2) + (-1)(2 + 3) + (3 + 4) + (-1)(4 + 1) = 0$$

所以 $1 + 2; 2 + 3; 3 + 4; 4 + 1$ 线性相关.9. y 考虑向量组 $1; 1 + 2; \dots; 1 + 2 + \dots + s$ 的线性组合 $x_1(1 + 2) + x_2(2 + 3) + \dots + x_s(1 + 2 + \dots + s) = 0$,即 $(x_1 + x_2 + \dots + x_s)1 + (x_2 + \dots + x_s)2 + \dots + x_s s = 0$ 因为 $1; 2; \dots; s$ 线性无关, 所以

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_s)1 + (x_2 + \dots + x_s)2 + \dots + x_s s = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0 \\ x_2 + \dots + x_s = 0 \\ \vdots \\ x_s = 0 \end{cases} \quad (*)$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

而齐次线性方程组()的系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

而齐次线性方程组()的系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

有 s 个 $\dot{1}$ ，等于未·量个数，()·有0解。



习题3.3(P_{115} P_{118})

齐次线性方程组()的系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

有 s 个 $\dot{1}$ ，等于未知量个数，()有0解。

即有当 $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ 时，才可以使得()成立，



习题3.3(P_{115} P_{118})

齐次线性方程组()的系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

有 s 个 1 ，等于未知量个数，()有 0 解。

即有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ 时，才可以使得()成立，

即，有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ 时，才可以使

$$x_1(1 + x_2 + \cdots + x_s) + \cdots + x_s(1 + x_2 + \cdots + x_s) = 0$$

成立，



习题3.3(P_{115} P_{118})

齐次线性方程组()的系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

有 s 个 1 ，等于未知量个数，()有0解。

即有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ 时，才可以使得()成立，

即，有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ 时，才可以使

$$x_1(1 + x_2 + \cdots + x_s) + \cdots + x_s(1 + x_2 + \cdots + x_s) = 0$$

成立，所以 $1; 1 + x_2; \cdots; 1 + x_2 + \cdots + x_s$ 线性无关。



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法.



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. γ 采用反 γ 法. 假设 $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \gamma_1 + k_2 \gamma_2 + k_3 \gamma_3 = 0$ 成立.



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法. 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 成立.

由于 $k_1; k_2; k_3$ 不全为 0, 所以 • 有三 « 情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法. 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 成立.

由于 $k_1; k_2; k_3$ 不全为 0, 所以 • 有三 « 情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.

若 $k_3 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$\alpha_3 = -\left(\frac{k_1}{k_3}\right) \alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \alpha_2$, α_3 与 α_2 不能由 $\alpha_1; \alpha_2$ 线性表出 矛盾;



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法. 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 成立.

由于 $k_1; k_2; k_3$ 不全为 0, 所以 • 有三 « 情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.

若 $k_3 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_3 = -\left(\frac{k_1}{k_3}\right) \alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \alpha_2, \text{ 与 } \alpha_3 \text{ 不能由 } \alpha_2; \alpha_3 \text{ 线性表出 盾};$$

若 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_2 = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \alpha_1, \text{ 与 } \alpha_2 \text{ 不能由 } \alpha_1 \text{ 线性表出 盾};$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法. 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 成立.

由于 $k_1; k_2; k_3$ 不全为 0, 所以 • 有三 « 情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.

若 $k_3 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_3 = -\left(\frac{k_1}{k_3}\right) \alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \alpha_2, \text{ 与 } \alpha_3 \text{ 不能由 } \alpha_2; \alpha_3 \text{ 线性表出 盾};$$

若 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_2 = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \alpha_1, \text{ 与 } \alpha_2 \text{ 不能由 } \alpha_1 \text{ 线性表出 盾};$$

若 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得 $k_1 \alpha_1 = 0; \alpha_1 = 0$, 与 $\alpha_1 \neq 0$ 盾.



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. y 采用反 y 法. 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, K 存 3 不全为 0 的数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 成立.

由于 $k_1; k_2; k_3$ 不全为 0, 所以 • 有三 « 情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.

若 $k_3 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_3 = -\left(\frac{k_1}{k_3}\right) \alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \alpha_2, \text{ 与 } \alpha_3 \text{ 不能由 } \alpha_1; \alpha_2 \text{ 线性表出 盾};$$

若 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_2 = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \alpha_1, \text{ 与 } \alpha_2 \text{ 不能由 } \alpha_1 \text{ 线性表出 盾};$$

若 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$, K 由 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 可得 $k_1 \alpha_1 = 0; \alpha_1 = 0$, 与 $\alpha_1 \neq 0$ 盾.

综上, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

10. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 采用反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则存在不全为0的数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 成立.

由于 k_1, k_2, k_3 不全为0, 所以有三种情况: $k_3 \neq 0$, 或 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 或 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$.

若 $k_3 \neq 0$, 则由 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_3 = -\left(\frac{k_1}{k_3}\right)\alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right)\alpha_2, \text{ 即 } \alpha_3 \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性表出, 矛盾;}$$

若 $k_3 = 0; k_2 \neq 0$, 则由 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 可得

$$\alpha_2 = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\alpha_1, \text{ 即 } \alpha_2 \text{ 可由 } \alpha_1 \text{ 线性表出, 矛盾;}$$

若 $k_3 = k_2 = 0; k_1 \neq 0$, 则由 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 可得 $k_1\alpha_1 = 0; \alpha_1 = 0$, 与 $\alpha_1 \neq 0$ 矛盾.

综上, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

注: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中, 向量 $\alpha_1 \neq 0$ 且任何一个向量都不能由它前面的向量线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y



习题3.3(P_{115} P_{118})11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \beta_1) + x_2(\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + x_s(\alpha_s + \beta_s) = 0;$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots + x_s(\alpha_s + \alpha_1) = 0;$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \cdots + x_s)\alpha_1 = 0; \quad (*)$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots + x_s(\alpha_{s-1} + \alpha_s) = 0;$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \cdots + x_s)\alpha_s = 0; \quad (*)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \beta_1) + x_2(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + x_s(\alpha_s + \beta_s) = 0;$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \dots + x_s)\beta = 0; \quad (*)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以由(*)式, 得

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_s = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0 \end{array}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \beta_1) + x_2(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + x_s(\alpha_s + \beta_s) = 0;$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \dots + x_s)\gamma = 0; \quad (*)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以由(*)式, 得

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{XXXXX} \\ x_1 = 0 \\ \text{XXXXX} \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ \text{XXXXX} \\ x_s = 0 \\ \text{XXXXX} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{XXXXX} \\ x_1 = 0 \\ \text{XXXXX} \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ \text{XXXXX} \\ x_s = 0 \end{array}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

11. y 考虑组合

$$x_1(\alpha_1 + \beta_1) + x_2(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + x_s(\alpha_s + \beta_s) = 0;$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \dots + x_s)\gamma = 0; \quad (*)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以由(*)式, 得

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{〰} \\ x_1 = 0 \\ \text{〰} \\ x_2 = 0 \\ \text{〰} \\ \vdots \\ \text{〰} \\ x_s = 0 \\ \text{〰} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{〰} \\ x_1 = 0 \\ \text{〰} \\ x_2 = 0 \\ \text{〰} \\ \vdots \\ \text{〰} \\ x_s = 0 \end{array} \end{array}$$

所以 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_s + \beta_s$ 也线性无关.





习题3.3(P_{115} P_{118})

12. y 假设 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关, 考虑组合

$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = 0$, 由 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$, K

$$\begin{aligned}
 & x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s \\
 = & \frac{1}{s-1} [(2-s)\alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s] (\alpha_1) \\
 & + \frac{1}{s-1} [x_1 + (2-s)\alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s] (\alpha_2) \\
 & + \dots + \frac{1}{s-1} [x_1 + x_2 + \dots + (2-s)\alpha_s] (\alpha_s)
 \end{aligned}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

12. y 假设 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 线性无关, 考虑组合

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s = 1$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

12. y 假设 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 线性无关, 考虑组合

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s = 1$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

所以

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1 + x_2 + x_s](1) + \\ & \frac{1}{s-1}[x_1 + (2-s)x_2 + x_s](2) + \\ & + \frac{1}{s-1}[x_1 + x_2 + (2-s)x_s](s) = 0 \end{aligned}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

所以

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1 + x_2 + \dots + x_s](1) + \\
 & \frac{1}{s-1}[x_1 + (2-s)x_2 + \dots + x_s](2) + \dots \\
 & + \frac{1}{s-1}[x_1 + x_2 + \dots + (2-s)x_s](s) = 0 \\
 & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1 + x_2 + \dots + x_s] = 0 \\
 & \frac{1}{s-1}[x_1 + (2-s)x_2 + \dots + x_s] = 0 \\
 & \vdots \\
 & \frac{1}{s-1}[x_1 + x_2 + \dots + (2-s)x_s] = 0 \\
 & (2-s)x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0 \\
 & x_1 + (2-s)x_2 + \dots + x_s = 0 \\
 & \vdots \\
 & x_1 + x_2 + \dots + (2-s)x_s = 0
 \end{aligned}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

()的系数矩 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & s & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & s & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

()的系数矩 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & s & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix}$$

当 $s \neq 1$ 时, 系数矩 的阶梯形 个数 s , () 有 0 解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

()的系数矩 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & s & 1 & & 1 \\ 1 & & 2 & s & & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & & 1 & & & \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

()的系数矩 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & s & 1 \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & s & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix}$$

当 $s \neq 1$ 时, 系数矩 的阶梯形 个数 s , () 有 0 解, 所以 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关.

假设 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关, 考虑组合

$$x_1(\alpha_1) + x_2(\alpha_2) + \dots + x_s(\alpha_s) = 0;$$

由于 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$, 且 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关, 所以

习题3.3(P_{115} P_{118})

$$\begin{aligned}
 & x_1(\quad_1) + x_2(\quad_2) + \quad + x_s(\quad_s) = 0 \\
 , & (x_2 + x_3 + \quad + x_s) \quad_1 + (x_1 + x_3 + \quad + x_s) \quad_2 \\
 & + \quad + (x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1}) \quad_s = 0 \\
 & \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\ x_1 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1} = 0 \end{pmatrix} \quad (\quad)
 \end{aligned}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

$$\begin{aligned}
 & x_1(\quad_1) + x_2(\quad_2) + \quad + x_s(\quad_s) = 0 \\
 & , \quad (x_2 + x_3 + \quad + x_s) \quad_1 + (x_1 + x_3 + \quad + x_s) \quad_2 \\
 & \quad + (x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1}) \quad_s = 0 \\
 & \quad x_2 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\
 & \quad x_1 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\
 &) \quad \vdots \\
 & \quad x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1} = 0
 \end{aligned}
 \quad (\quad)$$

() 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

$$\begin{aligned}
 & x_1(\quad_1) + x_2(\quad_2) + \quad + x_s(\quad_s) = 0 \\
 & , \quad (x_2 + x_3 + \quad + x_s) \quad_1 + (x_1 + x_3 + \quad + x_s) \quad_2 \\
 & \quad + (x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1}) \quad_s = 0 \\
 & \quad x_2 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\
 & \quad x_1 + x_3 + \quad + x_s = 0 \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad x_1 + x_2 + \quad + x_{s-1} = 0
 \end{aligned}$$

() 系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形 $\neq I$ 个数为 s , () • 有 0 解, 所以
 $\begin{matrix} 1; & 2; \dots; & s \end{matrix}$ 线性无关.



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形 $\neq I$ 个数为 s , () • 有 0 解, 所以
 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关.

13. y



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形 $\forall i$ 个数为 s , () • 有 0 解, 所以

1; 2



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形有 s 个非零行， $(n-s) \times (n-s)$ 子矩阵有 0 解，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-s}$ 线性无关。

13. y 因为 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，所以存在系数 $l_1, l_2, \dots, l_s$ ，使 $\alpha = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1} + l_s \alpha_s$ () 成立。

若 $l_s = 0$ ， $\alpha = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1}$ ，

即， α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，与已知矛盾。

所以 $l_s \neq 0$ ， α 由 () 得 $\alpha_s = \frac{l_1}{l_s} \alpha_1 + \dots + \frac{l_{s-1}}{l_s} \alpha_{s-1} + \frac{1}{l_s} \alpha$ ，

所以 α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出。

假设 α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形有 s 个非零行, $(n-s) \times (n-s)$ 子矩阵有 0 解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-s}$ 线性无关.

13. y 因为 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, 所以存在 3 系数 $l_1, l_2, \dots, l_s$, 使 $\alpha = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1} + l_s \alpha_s$ () 成立.

若 $l_s = 0$, $\alpha = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1}$,

即, α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, 与已知矛盾.

所以 $l_s \neq 0$, α 由 () 得 $\alpha = \frac{l_1}{l_s} \alpha_1 + \dots + \frac{l_{s-1}}{l_s} \alpha_{s-1} + \frac{1}{l_s} \alpha_s$,

所以 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 线性表出.

假设 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, α 存在 3 系数 $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$, 使得 $\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1}$.



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形有 s 个非零行, 有 0 解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

13. y 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, 所以存在系数 $l_1, l_2, \dots, l_s$, 使 $y = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1} + l_s \alpha_s$ () 成立.

若 $l_s = 0$, $y = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1}$,

即, y 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, 与已知矛盾.

所以 $l_s \neq 0$, K 由 () 得 $\alpha_s = \frac{l_1}{l_s} \alpha_1 + \dots + \frac{l_{s-1}}{l_s} \alpha_{s-1} + \frac{1}{l_s} y$,

所以 α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, y$ 线性表出.

假设 α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, K 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$, 使得 $\alpha_s = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1}$.

2 由 (), $K = (l_1 + l_s k_1) \alpha_1 + \dots + (l_{s-1} + l_s k_{s-1}) \alpha_{s-1}$,
与已知矛盾.



习题3.3(P_{115} P_{118})

系数矩阵的阶梯形 $\neq \mathbf{I}$ 个数为 s , () • 有 0 解, 所以 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关.

13. β 因为 β 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{s-1}; \alpha_s$ 线性表出, 所以存在 3 系数 $l_1; l_2; \dots; l_s$, 使 $\beta = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1} + l_s \alpha_s$ () 成立.

若 $l_s = 0$, $\beta = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{s-1} \alpha_{s-1}$,

即, β 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{s-1}$ 线性表出, β 与已 • 盾.

所以 $l_s \neq 0$, β 由 () 得 $\beta = \frac{l_1}{l_s} \alpha_1 + \dots + \frac{l_{s-1}}{l_s} \alpha_{s-1} + \frac{1}{l_s} \alpha_s$,

所以 β 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{s-1}; \alpha_s$ 线性表出.

假设 β 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{s-1}$ 线性表出, β 存在 3 系数 $k_1; k_2; \dots; k_{s-1}$, 使得 $\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1}$.

2 由 (), $\beta = (l_1 + l_s k_1) \alpha_1 + \dots + (l_{s-1} + l_s k_{s-1}) \alpha_{s-1}$, β 也与已 • 盾.

所以, β 不可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{s-1}$ 线性表出.



习题3.3(P_{115} P_{118})14. y 

习题3.3(P_{115} P_{118})

14. y 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

14. y 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{初等行变换}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.3(P_{115} P_{118})

14. y 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩 A 的阶梯形 $\mathcal{A}$ 有3个 $\hat{1}$, 其列向量线性无关,



习题3.3(P_{115} P_{118})

14. y 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造矩

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩 A 的阶梯形 $\neq$ 有3个 $\neq$, 其列向量线性无关,
即对任意的 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

