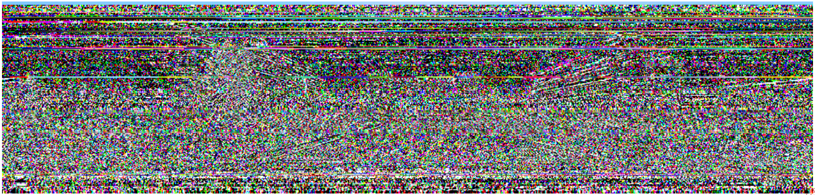
线性代数

第　章：线性 • 程组

宿州学院　数学与统计学院



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解　元、三元线性 • 程组的加减消元 { .

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解　元、三元线性 • 程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性 • 程组实施以下变形：

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解　元、三元线性 • 程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性 • 程组实施以下变形：

①交换两个 • 程的　置；

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性 • 程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性 • 程组实施以下变形：

①交换两个 • 程的 置；

②将某一个 • 程的两边同乘一个 š 零数；

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解　元、三元线性 • 程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性 • 程组实施以下变形：

①交换两个 • 程的　置；

②将某一个 • 程的两边同乘一个 š 零数；

③将某一个 • 程的倍数加到另一个 • 程上去.

2.2 线性・程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性・程组的加减消元 {.

加减消元的过程实际上就是对线性・程组实施以下变形：

①交换两个・程的 置；

②将某一个・程的两边同乘一个 š 零数；

③将某一个・程的倍数加到另一个・程上去.

称上述对线性・程组的三种变形 线性・程组的初等变换.

2.2 线性・程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性・程组的加减消元 {.

加减消元的过程实际上就是对线性・程组实施以下变形：

①交换两个・程的 置；

②将某一个・程的两边同乘一个 š 零数；

③将某一个・程的倍数加到另一个・程上去.

称上述对线性・程组的三种变形 线性・程组的初等变换.

由于线性・程组的初等变换只是对・程组的系数进行运算(就是合并同类项)，所以可以用线性・程组的系数、常数项以及它们的相对 置构成的数表，即，用 置来表示 知量或者常数项，相应 置的数来表示相应 知量的系数，从 实现线性・程组的表示. 这种表示就是线性・程组的矩阵表示.

2.2 线性•程组的高斯消元 {

例如，“电路　络　题”所列出的•程，用矩阵表示

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & -4 & -7 & 0 & 40 \\ -4 & 13 & 0 & -5 & -10 \\ -7 & 0 & 15 & -6 & 30 \\ 0 & -5 & -6 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

一般地，n个　知量，m个 • 程的 • 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

一般地，n个　知量，m个 • 程的 • 程组

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
$$

可以用系数和常数项按照其相对　置构成的矩阵：

$$
\overline{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

来表示.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

一般地，n个　知量，m个 • 程的 • 程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

可以用系数和常数项按照其相对　置构成的矩阵：

$$
\overline{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

来表示.称$\overline{A}$　线性 • 程组的**增广矩阵**.

2.2 线性・程组的高斯消元 {

增广矩阵$\overline{A}$　全由线性・程组　一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$　增广矩阵也　一地确定一个线性・程组.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

增广矩阵$\overline{A}$ 全由线性 • 程组 一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性 • 程组.

例如，给定矩阵
$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

增广矩阵$\overline{A}$ 全由线性 • 程组 一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性 • 程组.

例如，给定矩阵
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

以$\overline{A}$ 增广矩阵的线性 • 程组是 一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

2.2 线性・程组的高斯消元{

增广矩阵$\overline{A}$ 全由线性・程组 一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性・程组.

例如，给定矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以$\overline{A}$ 增广矩阵的线性・程组是 一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

增广矩阵$\overline{A}$ 全由线性 • 程组 一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性 • 程组.

例如，给定矩阵
$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

以$\overline{A}$ 增广矩阵的线性 • 程组是 一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

增广矩阵$\overline{A}$　全由线性 • 程组　一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$　增广矩阵也　一地确定一个线性 • 程组.

例如，给定矩阵
$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

以$\overline{A}$　增广矩阵的线性 • 程组是　一确定的，它是
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \end{cases}$$

第1个 • 程乘(-2)加到第2个 • 程

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个 • 程乘(-2)加到第2个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第3个 • 程

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.1 利用"加减消元{"解线性•程组，即，利用线性•程组初等变换解线性•程组

8

$$x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 = 10$$

$$2$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

8
>>>
<
$x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 \quad = 10$

2

>>>
.

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.1 利用"加减消元{"解线性•程组，即，利用线性•程组初等变换解线性•程组

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & =4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =2 \end{array}\right.$$

第1个•程乘(-2)加到第2个•程

第1个•程乘(-1)加到第3个•程

第1个•程乘(-1)加到第4个•程

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & =-15 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个 • 程乘(-2)加到第2个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第3个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第4个 • 程

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \end{cases}$$

第1个 • 程乘(-2)加到第2个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第3个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第4个 • 程

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = -4 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性 • 程组，即，利用线性 • 程组初等变换解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\to \left\{
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15
\end{array}
\right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24
\end{array}
\right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array}
\right.
$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

$$
\rightarrow \left\{
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array}
\right.
\qquad \text{第3个•程乘}\frac{1}{8}
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 & \\ \quad\; -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 & \text{第3个 • 程乘} \tfrac{1}{8} \\ \qquad\qquad 8x_3 = 24 & \text{第4个 • 程乘} (-\tfrac{1}{2}) \\ \qquad\qquad\quad -2x_4 = -8 & \end{cases}
$$

$\rightarrow$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array} \right.
\begin{array}{l}
\\
\text{第3个 • 程乘}\frac{1}{8} \\
\text{第4个 • 程乘}(-\frac{1}{2}) \\
\\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15
\end{array} \right.
$$

2.2 线性•程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{
\begin{array}{rrrrl l}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 & \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 & \text{第3个•程乘}\frac{1}{8} \\
 & & 8x_3 & & = 24 & \text{第4个•程乘}(-\frac{1}{2}) \\
 & & & -2x_4 & = -8 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\rightarrow \left\{
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & x_3 & & = 3
\end{array}
\right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\
\text{第3个 • 程乘}\frac{1}{8} \\
\text{第4个 • 程乘}(-\frac{1}{2}) \\
\\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & x_3 & & = 3 \\
 & & & x_4 & = 4
\end{array}\right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{array}\right.$$

第3个 • 程乘$\frac{1}{8}$

第4个 • 程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

第4个 • 程乘(-1)加到第1个

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{array}\right.$$

第3个 • 程乘$\frac{1}{8}$

第4个 • 程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

第4个 • 程乘(-1)加到第1个

第4个 • 程加到第2个

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \end{array}\right.$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array} \right.
$$

第3个•程乘$\frac{1}{8}$

第4个•程乘$(-\frac{1}{2})$

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & x_3 & & = 3 \\
 & & & x_4 & = 4
\end{array} \right.
$$

第4个•程乘(-1)加到第1个

第4个•程加到第2个

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \\
 & -x_2 & -3x_3 & = -11
\end{array} \right.
$$

2.2 线性•程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{array}\right.$$

第3个•程乘$\frac{1}{8}$

第4个•程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

第4个•程乘(-1)加到第1个

第4个•程加到第2个

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 6 \\ & -x_2 & -3x_3 & & = -11 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

2.2 线性•程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & -2x_4 & = -8
\end{array} \right.
$$

第3个•程乘 $\frac{1}{8}$

第4个•程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\
 & & x_3 & & = 3 \\
 & & & x_4 & = 4
\end{array} \right.
$$

第4个•程乘(-1)加到第1个

第4个•程加到第2个

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{llll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6
\end{array} \right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ \\ \end{array} \right.$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \quad\;\; -x_2 = -2 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & -x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

2.2 线性・程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

第2个・程加到第1个

第2个・程乘(-1)

$\rightarrow$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & -x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{array} \right.
$$

第2个 • 程加到第1个

第2个 • 程乘(-1)

$$
\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 2 \\ x_3 & = 3 \\ x_4 & = 4 \end{array} \right.
$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & -x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

第2个 • 程加到第1个

第2个 • 程乘(-1)

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array}\right.$$

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是 • 程组的解向量.

2.1 一般线性•程组

由于线性•程组与其增广矩阵相互 一确定的，所以“加减消元{”解•程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

2.1 一般线性・程组

由于线性・程组与其增广矩阵相互 一确定的，所以“加减消元 {”解・程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性 • 程组

由于线性 • 程组与其增广矩阵相互 一确定的，所以“加减消元 {”解 • 程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \quad -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \\ \quad -2x_4 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性 • 程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
\quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\
\quad 8x_3 = 24 \\
\quad -2x_4 = -8
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\
0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -8
\end{pmatrix}
$$

2.1 一般线性•程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 { ”解线性 • 程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 { ”解线性 • 程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性 • 程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 { ”解线性 • 程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性 • 程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ⅰ）交换增广矩阵的某两行；

2.2 线性•程组的高斯消元{

这个例子说明：利用“加减消元{”解线性•程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性•程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ⅰ）交换增广矩阵的某两行；

（ⅱ）将增广矩阵的某一行乘以一个š零数；

2.2 线性•程组的高斯消元{

这个例子说明：利用“加减消元{”解线性•程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性•程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ⅰ）交换增广矩阵的某两行；

（ⅱ）将增广矩阵的某一行乘以一个š零数；

（ⅲ）将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

2.2 线性・程组的高斯消元{

这个例子说明：利用"加减消元{"解线性・程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性・程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个š零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化　了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$　增广矩阵的线性・程组与原线性・程组是同解的.

2.2 线性•程组的高斯消元{

这个例子说明：利用“加减消元{”解线性•程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性•程组的增广矩阵$\overline{A}$实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个š零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化　了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$　增广矩阵的线性•程组与原线性•程组是同解的.

这是因　：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个•程的置；

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 { ”解线性 • 程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来　成.即，对线性 • 程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(i) 交换增广矩阵的某两行；

(ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个 š 零数；

(iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化　了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$　增广矩阵的线性 • 程组与原线性 • 程组是同解的.

这是因　：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个 • 程的　置；将增广矩阵的某一行乘以一个 š 零数就相当于将某一个 • 程乘以一个 š 零数；

2.2 线性•程组的高斯消元{

这个例子说明：利用“加减消元{”解线性•程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来 成.即，对线性•程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ⅰ）交换增广矩阵的某两行；

（ⅱ）将增广矩阵的某一行乘以一个š零数；

（ⅲ）将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化 了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$ 增广矩阵的线性•程组与原线性•程组是同解的.

这是因 ：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个•程的 置；将增广矩阵的某一行乘以一个š零数就相当于将某一个•程乘以一个š零数； 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行就相当于将某一个•程乘以一个倍数加到另一个•程.

2.2 线性・程组的高斯消元{

“加减消元{”的根本思想是"消元"，也就是通过对・程组的“初等变换”，消去・程组中排序在下面的・程中的 知量(系数)，使得・程组中下面的・程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的・程中所含的 知量个数，从 达到“消元”的目的.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

“加减消元 { ” 的根本思想是"消元"，也就是通过对 • 程组的 “初等变换”，消去 • 程组中排序在下面的 • 程中的 知量(系数)，使得 • 程组中下面的 • 程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的 • 程中所含的 知量个数，从 达到 “消元” 的目的.

利用增广矩阵，实质上 “加减消元 { ” 就是对 • 程组的增广矩阵进行初等行变，将其化 阶梯形，并最终化 规 ‰ 阶梯形.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

"加减消元 { "的根本思想是"消元"，也就是通过对 • 程组的"初等变换"，消去 • 程组中排序在下面的 • 程中的 知量(系数)，使得 • 程组中下面的 • 程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的 • 程中所含的 知量个数，从 达到"消元"的目的.

利用增广矩阵，实质上"加减消元 { "就是对 • 程组的增广矩阵进行初等行变，将其化 阶梯形，并最终化 规 ‰ 阶梯形.

以规 ‰ 阶梯形矩阵 增广矩阵的线性 • 程组，就是 们解线性 • 程组时要求的最简化的形式.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

"加减消元 { " 的根本思想是"消元"，也就是通过对 • 程组的 "初等变换"，消去 • 程组中排序在下面的 • 程中的 知量(系数)，使得 • 程组中下面的 • 程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的 • 程中所含的 知量个数，从 达到 "消元" 的目的.

利用增广矩阵，实质上 "加减消元 { " 就是对 • 程组的增广矩阵进行初等行变，将其化 阶梯形，并最终化 规 ‰ 阶梯形.

以规 ‰ 阶梯形矩阵 增广矩阵的线性 • 程组，就是 们解线性 • 程组时要求的最简化的形式.

因 求解一个线性 • 程组，其求解过程就是对其增广矩阵进行初等行变换，将其化 规 ‰ 阶梯形的过程.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.2 解线性 • 程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

解： • 程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.2 解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化规 ‰ 阶梯形矩阵.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.2 解线性 • 程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化规 ‰ 阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元 {”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.2 解线性•程组

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$$

解：•程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化规‰阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元{”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.2 解线性 • 程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

解： • 程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化规 ‰ 阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元 {”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & -2x_3 & = 2 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & -2x_3 & = 2 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = -1 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_3 = 2 \\ -3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ -3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&-2&2\\0&0&-3&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ -2x_3 = 2\\ -3x_3 = 1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&-3&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ x_3 = -1\\ -3x_3 = 1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ x_3 = -1\\ 0 = -2\end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规 ‰ 阶梯形)

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规‰阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规 ‰ 阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此 增广矩阵的线性 • 程组(右栏中最后一个 • 程)

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad\quad 0 & = -2 \end{cases}$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规‰阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此 增广矩阵的线性•程组(右栏中最后一个•程)

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -2 \end{cases}$$

显然， 论 知量$x_1; x_2; x_3$ 取什么值都不能满足第三个•程：$0 = -2$.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规 ‰ 阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此 增广矩阵的线性 • 程组(右栏中最后一个 • 程)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

显然， 论 知量$x_1; x_2; x_3$ 取什么值都不能满足第三个 • 程：$0 = -2$. 这说明原 • 程组是一个矛盾 • 程组，即原 • 程组是以空集 解集线性 • 程组，也说原线性 • 程组 解.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3 解线性 • 程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3 解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 5 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规‰ 阶梯形：

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3 解线性 • 程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规‰ 阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.3 解线性•程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

解： •程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规‰阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$ 第1行乘(-1)加到第2行

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3 解线性 • 程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 ‰ 阶梯形：

$-1 \quad 1 \quad 1$

B

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.3 解线性•程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

解： •程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规‰阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

第2行乘$(-\frac{1}{2})$

$\longrightarrow$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• 程组的增广矩阵经过初等行变换化　了规‰阶梯形矩阵，原 • 程组同解于以规‰阶梯形矩阵　增广矩阵的 • 程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases};$$

2.2 线性•程组的高斯消元{

$$\xrightarrow{第2行乘(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{第2行乘3加到第3行}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{第2行乘(-1)加到第1行}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

• 程组的增广矩阵经过初等行变换化 了规‰阶梯形矩阵，原•程组同解于以规‰阶梯形矩阵 增广矩阵的•程组

$$\begin{cases}x_1 - x_2 = 2\\ x_3 = -1\\ 0 = 0\end{cases}\text{；即}\begin{cases}x_1 = x_2 + 2\\ x_3 = -1\end{cases}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

由 $\left(\begin{array}{ll} x_1 & = x_2 + 2 \\ x_3 & = -1 \end{array}\right.$ 知， 知量x_2是可以任意取值的，且每当x_2任意取定一个值k时，x_1都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$:

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

由 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 知， 知量x_2是可以任意取值的，且每当x_2任意取定一个值k时，x_1都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$:

当任意取定$x_2 = k$时，都可以得到原 • 程组的一个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

由于k可以取任意数，所以原 • 程组有 穷多解.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

由 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 知， 知量x_2是可以任意取值的，且每当x_2任意取定一个值k时，x_1都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$:

当任意取定$x_2 = k$时，都可以得到原 • 程组的一个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

由于k可以取任意数，所以原 • 程组有 穷多解.

其解集 $\left\{ \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \middle| k \text{ 任意数} \right\}$.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

也可以用 $\begin{cases} x_1 & = x_2 + 2 \\ x_3 & = -1 \end{cases}$ 来表示这 穷多个解.称 线性 • 程组的一般解，其中以主元 系数的 知量$x_1; x_3$ 称 主变量，知量x_2称 自由 知量.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

也可以用 $\begin{cases} x_1 &= x_2 + 2 \\ x_3 &= -1 \end{cases}$ 来表示这 穷多个解.称 线性 • 程组的一般解，其中以主元 系数的 知量$x_1; x_3$ 称 主变量， 知量x_2称 自由 知量.

线性 • 程组的一般解就是用含自由 知量的式子来表示主变量.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

也可以用 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 来表示这 穷多个解.称 线性 • 程组的一般解，其中以主元 系数的 知量$x_1; x_3$ 称 主变量， 知量x_2称 自由 知量.

线性 • 程组的一般解就是用含自由 知量的式子来表示主变量.

例1.1中，• 程组的增广矩阵经过初等行变换化 规 ‰ 形阶梯形矩阵后，主元个数与 • 程个数相等，• 程组有 一解.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

也可以用 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 来表示这 穷多个解.称 线性 • 程组的一般解，其中以主元 系数的 知量x_1, x_3 称 主变量， 知量x_2称 自由 知量.

线性 • 程组的一般解就是用含自由 知量的式子来表示主变量.

例1.1中， • 程组的增广矩阵经过初等行变换化 规 ‰ 形阶梯形矩阵后，主元个数与 • 程个数相等， • 程组有 一解.

例2.2中， • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵后，常数列(增广矩阵的最后一列)出现了主元，即阶梯形矩阵对应的 • 程组出现“$0 = d$(其中d 是 š 零数)”这样的矛盾 • 程，这时 • 程组的解集 空集，即， • 程组 解.

[redacted]

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3中，• 程组的增广矩阵经过初等行变换化成规 ‰ 阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 š 零行数 2，小于 知量个数3.这时 • 程组有 穷多解.

一般结论：线性 • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规 ‰ 阶梯形矩阵)后，

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3中， • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成规 ‰ 阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 š 零行数 2，小于 知量个数3.这时 • 程组有 穷多解.

一般结论：线性 • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规 ‰ 阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾 • 程 “$0 = d$ （其中d 是 š 零数）”， • 程组 解；

2.2 线性•程组的高斯消元{

例2.3中，•程组的增广矩阵经过初等行变换化成规‰阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且š零行数 2，小于 知量个数3.这时•程组有 穷多解.

一般结论：线性•程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规‰阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾•程“$0 = d$ （其中d 是š零数）”，•程组 解；

若常数列没有主元，则•程组有解.

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3中， • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成规 ‰ 阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 š 零行数 2，小于 知量个数3.这时 • 程组有 穷多解.

一般结论：线性 • 程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规 ‰ 阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾 • 程 "$0 = d$ （其中d 是 š 零数）"， • 程组 解；

若常数列没有主元，则 • 程组有解.

在常数列没有主元时，

若 š 零行的个数(也是主元个数)等于 知量的个数，则 • 程组有 一解；

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.3中，•程组的增广矩阵经过初等行变换化成规‰阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且š零行数 2，小于 知量个数3.这时•程组有 穷多解.

一般结论：线性•程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规‰阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾•程“$0=d$（其中d是š零数）”，•程组 解；

若常数列没有主元，则•程组有解.

在常数列没有主元时，

若š零行的个数(也是主元个数)等于 知量的个数，则•程组有 一解；

若š零行的个数(也是主元个数)小于 知量的个数，则原•程组有 穷多解.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com