

线性代数

第 章：线性·程组

宿州学院 数学与统计学院



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性 • 程组的加减消元 { .



2.2 线性·程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性·程组的加减消元 { .
加减消元的过程实际上就是对线性·程组实施以下变形：



2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法。
加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性·程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性·程组实施以下变形：

- ① 交换两个·程的 置；
- ② 将某一个·程的两边同乘一个 ≠ 零数；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性·程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性·程组实施以下变形：

- ① 交换两个·程的 置；
- ② 将某一个·程的两边同乘一个 ≠ 零数；
- ③ 将某一个·程的倍数加到另一个·程上去.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性·程组的加减消元 { .

加减消元的过程实际上就是对线性·程组实施以下变形：

- ① 交换两个·程的 置；
- ② 将某一个·程的两边同乘一个 ≠ 零数；
- ③ 将某一个·程的倍数加到另一个·程上去.

称上述对线性·程组的三种变形 线性·程组的初等变换.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

中学阶段，已熟知解 元、三元线性·程组的加减消元 { .
 加减消元的过程实际上就是对线性·程组实施以下变形：

- ①交换两个·程的 置；
- ②将某一个·程的两边同乘一个 ≠ 零数；
- ③将某一个·程的倍数加到另一个·程上去.

称上述对线性·程组的三种变形 线性·程组的初等变换.

由于线性·程组的初等变换只是对·程组的系数进行运算(就是合并同类项)，所以可以用线性·程组的系数、常数项以及它们的相对 置构成的数表，即，用 置来表示 知量或者常数项，相应 置的数来表示相应 知量的系数，从 实现线性·程组的表示. 这种表示就是线性·程组的矩阵表示.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例如，“电路 络 题”所列出的·程，用矩阵表示

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l} 8 \\ \text{www} \\ \cdot \end{array} & \begin{array}{l} 12I_1 - 4I_2 - 7I_3 \\ -4I_1 + 13I_2 - 5I_4 \\ -7I_1 + 15I_3 - 6I_4 \\ -5I_2 - 6I_3 + 14I_4 \end{array} & \begin{array}{l} = 40 \\ = -10 \\ = 30 \\ = 20 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} 0 \\ \text{www} \\ @ \end{array} \begin{array}{ccccc} 12 & -4 & -7 & 0 & 40 \\ -4 & 13 & 0 & -5 & -10 \\ -7 & 0 & 15 & -6 & 30 \\ 0 & -5 & -6 & 14 & 20 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \text{ccc} \\ \end{array}
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

一般地, n 个 知量, m 个·程的·程组

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} 8 \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \\ \text{\\} \end{array} & \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} & \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ \vdots \\ = b_m \end{array}
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{array}{rcl} \infty & & \\ \text{www} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \text{www} & \vdots & \vdots \\ \cdot & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

可以用系数和常数项按照其相对位置构成的矩阵:

$$\overline{A} = \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & 1 \\ & \text{a}_{11} & \text{a}_{12} & \cdots & \text{a}_{1n} & b_1 \\ \text{a}_{21} & \text{a}_{22} & \cdots & \text{a}_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{a}_{m1} & \text{a}_{m2} & \cdots & \text{a}_{mn} & b_m \end{array}$$

来表示.

2.2 线性·程组的高斯消元 {

一般地, n 个 知量, m 个·程的·程组

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{c} 8 \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \end{array} & \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} & = \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}
 \end{array}$$

可以用系数和常数项按照其相对 置构成的矩阵:

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \overline{A} = \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \end{array} & \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \\ \text{~} & & & & & \begin{array}{c} \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \\ \text{~} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

来表示.称 $\overline{A}$ 线性·程组的增广矩阵.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

增广矩阵 $\bar{A}$ 全由线性·程组 一确定，且对给定一个列数
 不小于2的矩阵 $\bar{A}$ ，以 $\bar{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性·程
 组.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

增广矩阵 $\bar{A}$ 全由线性·程组 一确定, 且对给定一个列数
不小于2的矩阵 $\bar{A}$, 以 $\bar{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性·程
组.

例如, 给定矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以 $\bar{A}$ 增广矩阵的线性·程组是 一确定的, 它是

$$\begin{matrix} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ +x_2 \\ +x_3 \\ +x_4 \end{matrix} = 10$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

增广矩阵 $\bar{A}$ 全由线性·程组 一确定, 且对给定一个列数
不小于2的矩阵 $\bar{A}$, 以 $\bar{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性·程
组.

例如, 给定矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以 $\bar{A}$ 增广矩阵的线性·程组是 一确定的, 它是

$$\begin{array}{l} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \\ \cdot \end{array} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

增广矩阵 $\bar{A}$ 全由线性·程组 一确定, 且对给定一个列数
不小于2的矩阵 $\bar{A}$, 以 $\bar{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性·程
组.

例如, 给定矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以 $\bar{A}$ 增广矩阵的线性·程组是 一确定的, 它是

$$\begin{array}{l} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

增广矩阵 $\bar{A}$ 全由线性·程组 一确定, 且对给定一个列数
不小于2的矩阵 $\bar{A}$, 以 $\bar{A}$ 增广矩阵也 一地确定一个线性·程
组.

例如, 给定矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以 $\bar{A}$ 增广矩阵的线性·程组是 一确定的, 它是

$$\begin{array}{l} 8 \\ \sim \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{l}
 \text{⑧} \\
 \text{⑨} \\
 \text{⑩} \\
 \text{⑪}
 \end{array}
 \begin{array}{rrrrr}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{l}
 \text{⑧} \\
 \text{⑧} \\
 \text{⑧} \\
 \text{⑧}
 \end{array}
 \begin{array}{rrcr}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2
 \end{array}$$

第1个·程乘(-2)加到第2个·程



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{l}
 \text{⑧} \\
 \text{⑧} \\
 \text{⑧} \\
 \text{⑧}
 \end{array}
 \begin{array}{rrcr}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2
 \end{array}$$

第1个·程乘(-2)加到第2个·程
 第1个·程乘(-1)加到第3个·程



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & & & & & \\ \sim & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\ 2 & & & & & & \\ \sim & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & & & & & \\ \sim & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\ 2 & & & & & & \\ \sim & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 10 \\
 5 \\
 4 \\
 2
 \end{array}$$

第1个·程乘(-2)加到第2个·程
 第1个·程乘(-1)加到第3个·程
 第1个·程乘(-1)加到第4个·程

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 10 \\
 -15
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元"解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{rrrrr} \text{blue} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ \text{red} & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\ \text{black} & x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\ \text{green} & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \end{array}$$

第1个 • 程乘(-2)加到第2个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第3个 • 程
第1个 • 程乘(-1)加到第4个 • 程

$$\rightarrow \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = -4 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4
 \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{c} 10 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{array}$$

第1个·程乘(-2)加到第2个·程
 第1个·程乘(-1)加到第3个·程
 第1个·程乘(-1)加到第4个·程

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \\
 & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 \\
 & & & -2x_4
 \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{c} 10 \\ -15 \\ -4 \\ -8 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.1 利用"加减消元 { "解线性·程组，即，利用线性·程组初等变换解线性·程组

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & & & & & \\ \sim & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\ 2 & & & & & & \\ \sim & & & & & & \\ . & & & & & & \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclclcl}
 & 8 & & & & \\
 & \text{wavy} & & & & \\
 & \rightarrow & & & & \\
 & \text{wavy} & & & & \\
 & . & & & &
 \end{array}
 \begin{array}{rclclcl}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -15 \\
 & & 8x_3 & & = & 24
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclclcl}
 & 8 & & & & \\
 & \sim & & & & \\
 \rightarrow & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\
 & & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & & = & -15 \\
 & & & & 8x_3 & & = & 24 \\
 & & & & & -2x_4 & = & -8
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclclcl}
 8 & & & & & \\
 \sim & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 \rightarrow & & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 & \text{第3个} \cdot \text{程乘} \frac{1}{8} \\
 \sim & & & 8x_3 & & = 24 \\
 & & & & -2x_4 & = -8
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{array}{rclcl} \text{⑧} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 & \text{第3个} \cdot \text{程乘} \frac{1}{8} \\ \rightarrow & & & 8x_3 & & = 24 & \text{第4个} \cdot \text{程乘} (-\frac{1}{2}) \\ & & & & -2x_4 & = -8 \end{array}$$

→



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$ 第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \\
 & & 8x_3 & \\
 & & & -2x_4
 \end{array} & \begin{array}{l}
 = 10 \\
 = -15 \\
 = 24 \\
 = -8
 \end{array}
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$ 第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \\
 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \\
 & & x_3 & \\
 & & &
 \end{array} & \begin{array}{l}
 = 10 \\
 = -15 \\
 = 3 \\
 =
 \end{array}
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} 8 \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} & \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 8x_3 = 24 \\ -2x_4 = -8 \end{array} \\
 \rightarrow & \\
 \begin{array}{c} 8 \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} & \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array}
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$ 第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$ 

2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$
第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$

第4个·程乘(-1)加到第1个



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$
第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$

第4个·程乘 (-1) 加到第1个
第4个·程加到第2个

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \end{array} & = 6
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$
第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$

第4个·程乘 (-1) 加到第1个
第4个·程加到第2个

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \end{array} & = 6 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & \end{array} & = -11
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$
第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$

第4个·程乘 (-1) 加到第1个
第4个·程加到第2个

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \end{array} & = 6 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & \end{array} & = -11 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & 8x_3 & \end{array} & = 24 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & -2x_4 \end{array} & = -8
 \end{array}$$

第3个·程乘 $\frac{1}{8}$
第4个·程乘 $(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 \end{array} & = 10 \\
 & \begin{array}{cccc} & -x_2 & -3x_3 & -x_4 \end{array} & = -15 \\
 & \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} & = 3 \\
 & \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} & = 4
 \end{array}$$

第4个·程乘(-1)加到第1个
第4个·程加到第2个

$$\begin{array}{rcl}
 \rightarrow & \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \end{array} & = 6
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{array}{c} \infty \\ \text{---} \\ x_1 + x_2 = 3 \\ \rightarrow \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 8 & & \\
 \text{---} & x_1 + x_2 & = 3 \\
 & -x_2 & = -2 \\
 \rightarrow & & \\
 \text{---} & & \\
 . & &
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \begin{array}{l} \text{原方程组} \\ \text{第2个·程加到第1个} \\ \text{第2个·程乘}(-1) \end{array} \\
 \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array} \\
 \rightarrow \begin{array}{l} \text{化简后} \\ \text{第1个·程乘}(-1) \end{array} \\
 \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array}
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \end{array} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array} & \\
 \rightarrow & & \begin{array}{l} \text{第2个·程加到第1个} \\ \text{第2个·程乘}(-1) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \end{array} & \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 0 \cdot x_4 = 4 \end{array} & \\
 \rightarrow & & \\
 \begin{array}{c} \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \end{array} & \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 0 \cdot x_4 = 4 \end{array} &
 \end{array}$$

所以

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \text{是·程组的解向量.}$$



2.1 一般线性方程组

由于线性方程组与其增广矩阵相互一一对应的，所以“加减消元法”解方程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述：



2.1 一般线性·程组

由于线性·程组与其增广矩阵相互一确定的，所以“加减消元法”解·程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述：

$$\begin{array}{cccc|c}
 8 & & & & \\
 \text{~} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\
 \text{~} & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\
 \text{~} & x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\
 \cdot & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ccccc|c}
 0 & & & & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & \\
 2 & 1 & -1 & 1 & 5 & \\
 1 & -1 & 3 & -1 & 4 & \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 2 &
 \end{array}$$



2.1 一般线性·程组

由于线性·程组与其增广矩阵相互一确定的，所以“加减消元法”解·程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述：

$$\begin{array}{l}
 \text{①} \\
 \text{②} \\
 \text{③} \\
 \text{④}
 \end{array}
 \begin{array}{rrcr}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 10 \\
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 = 5 \\
 x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 = 4 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = 2
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ccccc}
 0 & & & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\
 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\
 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{①} \\
 \text{②} \\
 \text{③} \\
 \text{④} \\
 \text{⑤}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{①} \\
 \text{②} \\
 \text{③} \\
 \text{④}
 \end{array}
 \begin{array}{rrcr}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 10 \\
 -x_2 - 3x_3 & & -x_4 = -15 \\
 -2x_2 + 2x_3 & & -2x_4 = -6 \\
 & & -2x_4 = -8
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ccccc}
 0 & & & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\
 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\
 0 & -2 & 2 & -2 & -6 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & -8
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{①} \\
 \text{②} \\
 \text{③} \\
 \text{④} \\
 \text{⑤}
 \end{array}$$

2.1 一般线性·程组

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 & = & -15 \\ 8x_3 & = & 24 \\ -2x_4 & = & -8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}$$



2.1 一般线性·程组

$$\begin{array}{rcl}
 \text{⑧} & x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\
 & -x_2 - 3x_3 & = -11 \\
 & x_3 & = 3 \\
 & x_4 & = 4 \\
 \text{⑧} & x_1 + x_2 & = 3 \\
 & -x_2 & = -2 \\
 & x_3 & = 3 \\
 & x_4 & = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\
 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4
 \end{array}$$



2.1 一般线性·程组

$$\begin{array}{rcl}
 \text{8} & & \\
 \text{8} & x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\
 & -x_2 - 3x_3 & = -11 \\
 & x_3 & = 3 \\
 & x_4 & = 4 \\
 \text{8} & & \\
 \text{8} & x_1 + x_2 & = 3 \\
 & -x_2 & = -2 \\
 & x_3 & = 3 \\
 & x_4 & = 4 \\
 \text{8} & & \\
 \text{8} & x_1 & = 1 \\
 & x_2 & = 2 \\
 & x_3 & = 3 \\
 & x_4 & = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0 & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\
 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(i) 交换增广矩阵的某两行；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数；
- (iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行。



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；
- (iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行。

将其化为了另一个矩阵 $\bar{B}$ ，则以 $\bar{B}$ 为增广矩阵的线性·程组与原线性·程组是同解的。



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；
- (iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行。

将其化为了另一个矩阵 $\bar{B}$ ，则以 $\bar{B}$ 增广矩阵的线性·程组与原线性·程组是同解的。

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个·程的位置；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数；
- (iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行。

将其化为了另一个矩阵 $\bar{B}$ ，则以 $\bar{B}$ 增广矩阵的线性·程组与原线性·程组是同解的。

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个·程的位置；将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数就相当于将某一个·程乘以一个 $\neq 0$ 零数；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

这个例子说明：利用“加减消元 {”解线性·程组的过程，全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成。即，对线性·程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施以下三种初等行变换：

- (i) 交换增广矩阵的某两行；
- (ii) 将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数；
- (iii) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行。

将其化为了另一个矩阵 $\bar{B}$ ，则以 $\bar{B}$ 增广矩阵的线性·程组与原线性·程组是同解的。

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个·程的位置；将增广矩阵的某一行乘以一个 $\neq 0$ 零数就相当于将某一个·程乘以一个 $\neq 0$ 零数；将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行就相当于将某一个·程乘以一个倍数加到另一个·程。



2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是“消元”，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去方程组中排在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程中所含的未知量个数严格小于排在上面的方程中所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的。



2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是“消元”，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去方程组中排在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程所含的未知量个数严格小于排在上面的方程所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的。

利用增广矩阵，实质上“加减消元法”就是对方程组的增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形，并最终化为规范阶梯形。



2.2 线性·程组的高斯消元 {

“**加减消元 {**”的根本思想是“**消元**”，也就是通过对·程组的“**初等变换**”，**消去**·程组中排序在下面的·程中的 知量(系数)，使得·程组中下面的·程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的·程中所含的 知量个数，从 达到“**消元**”的目的。

利用增广矩阵，实质上“**加减消元 {**”就是对·程组的增广矩阵进行初等行变，将其化 阶梯形，并最终化 规%阶梯形。

以规%阶梯形矩阵 增广矩阵的线性·程组，就是 们解线性·程组时要求的最简化的形式。



2.2 线性·程组的高斯消元 {

“加减消元 {”的根本思想是“消元”，也就是通过对·程组的“初等变换”，消去·程组中排序在下面的·程中的 知量(系数)，使得·程组中下面的·程中所含的 知量个数严格小于排序在上面的·程中所含的 知量个数，从 达到“消元”的目的。

利用增广矩阵，实质上“加减消元 {”就是对·程组的增广矩阵进行初等行变，将其化 阶梯形，并最终化 规 % 阶梯形。

以规 % 阶梯形矩阵 增广矩阵的线性·程组，就是 们解线性·程组时要求的最简化的形式。

因 求解一个线性·程组，其求解过程就是对其增广矩阵进行初等行变换，将其化 规 % 阶梯形的过程。



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

例2.2 解线性 • 程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解： • 程组的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 & 8 & & & \\
 & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\
 \text{例2.2 解线性 • 程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\
 & & & & \cdot \\
 & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 3 \\
 & & 0 & & 1 \\
 & & & 1 & -1 & 1 & 1
 \end{array}$$

解： • 程组的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{matrix} B & C \\ @ & A \end{matrix} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{matrix}$,

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化
规 % 阶梯形矩阵.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 \text{例2.2 解线性·程组} & x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\
 > & & & & \\
 & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 3 \\
 & 0 & & & 1
 \end{array}$$

$$\text{解：} \cdot \text{程组的增广矩阵} \bar{A} = \begin{array}{c} \text{B} \\ @ \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array} A,$$

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化
规 % 阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元 {”与“增广矩阵的初
等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 \text{例2.2 解线性·程组} & x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\
 > & & & & \\
 & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 3 \\
 & 0 & & & 1
 \end{array}$$

$$\text{解: } \bullet \text{ 程组的增广矩阵 } \bar{A} = \begin{array}{c} \text{B} \\ @ \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array} \text{A},$$

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化
规 % 阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元 {”与“增广矩阵的初
等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{array}{c} 0 \\ \text{B} \\ @ \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \text{A} \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 \text{例2.2 解线性·程组} & x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\
 > & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 3 \\
 & 0 & & & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{解: · 程组的增广矩阵 } \bar{A} = & @1 & -1 & -1 & 3A, \\
 & 2 & -2 & -1 & 3
 \end{array}$$

对其进行初等行变换，先将其化 阶梯形矩阵，再进一步化
规 % 阶梯形矩阵.

了使得大家更好的体会“加减消元 {”与“增广矩阵的初
等行变换”之间的关系， 们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 @1 & -1 & -1 & 3A \\
 2 & -2 & -1 & 3
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{rclcl}
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 > & x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\
 & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 3
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{B} & & & \text{C} \\
 @ & 0 & 0 & 2 \text{A} \\
 0 & 0 & -3 & 1
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -2 & 2 \\
 0 & 0 & -3 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 B \\
 @ \\
 0 \\
 B \\
 @ \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 A \\
 \\
 C \\
 A \\
 \\
 C
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{cccc}
 8 & & & \\
 x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & -2x_3 & = 2 \\
 & & -3x_3 & = 1
 \end{array}$$



2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 @B \\
 @0 \\
 0 \\
 0 \\
 @B \\
 @0 \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -2 & 2 \\
 0 & 0 & -3 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & -3 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 A \\
 A \\
 1 \\
 A \\
 A
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{c}
 8 \\
 \geq \\
 > \\
 > \\
 8 \\
 \geq \\
 > \\
 >
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & -2x_3 & = 2 \\
 & & -3x_3 & = 1 \\
 x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & x_3 & = -1 \\
 & & -3x_3 & = 1
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 @B & 0 & -2 & 2 \\
 @0 & 0 & -3 & 1 \\
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 @B & 0 & 1 & -1 \\
 @0 & 0 & -3 & 1 \\
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 @B & 0 & 1 & -1 \\
 @0 & 0 & 0 & -2
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{cccc}
 8 & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\
 & & & -2x_3 = 2 \\
 & & & -3x_3 = 1 \\
 8 & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\
 & & & x_3 = -1 \\
 & & & -3x_3 = 1
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{cccc|l}
 0 & & & 1 & \\
 1 & -1 & 1 & 1 & \\
 \text{B} & & & & \text{C} \\
 @ & 0 & -2 & 2 & \text{A} \\
 0 & 0 & -3 & 1 & \\
 0 & 1 & -1 & 1 & \\
 \text{B} & & & & \text{C} \\
 @ & 0 & 1 & -1 & \text{A} \\
 0 & 0 & -3 & 1 & \\
 0 & 1 & -1 & 1 & \\
 \text{B} & & & & \text{C} \\
 @ & 0 & 1 & -1 & \text{A} \\
 0 & 0 & 0 & -2 &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{cccc|l}
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & & -2x_3 & = 2 \\
 & & & -3x_3 & = 1 \\
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & & x_3 & = -1 \\
 & & & -3x_3 & = 1 \\
 8 & & & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\
 & & & x_3 & = -1 \\
 & & & 0 & = -2
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换， 们将其化 了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规 % 阶梯形)



2.2 线性·程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换，们将其化了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规%阶梯形)

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 B \\
 @ \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 C \\
 A \\
 \\
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换，们将其化了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规%阶梯形)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \text{B} & 0 & 0 & 1 & -1 \text{C} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \end{array}$$

以此 增广矩阵的线性·程组(右栏中最后一个·程)

$$\begin{array}{l} 8 \\ \geq \\ > \\ \cdot \end{array} \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ 0 = -2 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换，们将其化了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规%阶梯形)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \textcircled{B} 0 & 0 & 1 & -1 & \textcircled{C} A \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \end{array}$$

以此 增广矩阵的线性·程组(右栏中最后一个·程)

$$\begin{array}{l} 8 \\ \geq \\ > \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ 0 = -2 \end{array}$$

显然，论 知量 $x_1; x_2; x_3$ 取什么值都不能满足第三个·程： $0 = -2$.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

经过对增广矩阵的初等行变换，们将其化了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规%阶梯形)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \text{B} & 0 & 0 & 1 & -1 \text{C} \\ @ & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

以此 增广矩阵的线性·程组(右栏中最后一个·程)

$$\begin{array}{l} 8 \\ \geq \\ > \\ \cdot \end{array} \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ 0 = -2 \end{array}$$

显然，论 知量 $x_1; x_2; x_3$ 取什么值都不能满足第三个·程： $0 = -2$. 这说明原·程组是一个矛盾·程组，即原·程组是以空集 解集线性·程组，也说原线性·程组 解.



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 & 8 & & & \\
 & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\
 \text{例2.3 解线性 • 程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\
 & & & & \\
 & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 5
 \end{array}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \begin{array}{cc} & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \begin{array}{cc} & 1 \\ 3 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \\ C \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl}
 & 8 & & & \\
 & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\
 \text{例2.3 解线性 • 程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\
 & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 5
 \end{array}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ A \\ C \end{array}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 % 阶梯形：



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl} & 8 & & & \\ & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ \text{例2.3 解线性·程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\ & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 5 \end{array}$$

解：• 程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 % 阶梯形：

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl} & 8 & & & \\ & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ \text{例2.3 解线性·程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\ & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 5 \end{array}$$

解：• 程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \\ B \\ C \\ A \end{array}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 %
阶梯形：

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \\ B \\ C \\ A \end{array}$$

第1行乘(-1)加到第2行



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rclcl} & 8 & & & \\ & \geq & x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ \text{例2.3 解线性 • 程组} & & x_1 & -x_2 & -x_3 = 3 \\ & & & & \\ & & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 = 5 \end{array}$$

解： • 程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{array}{c|ccc|c} & & & & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \text{B} & 1 & -1 & -1 & 3 \\ \text{C} & 2 & -2 & -1 & 5 \end{array}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 %
阶梯形：



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{rcl}
 & \geq & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
 \text{例2.3 解线性·程组} & & x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\
 & & 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5
 \end{array}$$

解：• 程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ @1 & -1 & -1 & 3 \\ & 2 & -2 & -1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ C \\ A \end{array}$$

对其进行初等行变换，将其化 阶梯形矩阵，再进一步化 规 %
阶梯形：

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ B @ 1 & -1 & -1 & 3 \\ & 2 & -2 & -1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ C \\ A \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{第1行乘(-1)加到第2行} \\ \text{第1行乘(-2)加到第3行} \end{array}} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ B @ 0 & 0 & -2 & 2 \\ & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ C \\ A \end{array}$$

2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

第2行乘 $(-\frac{1}{2})$

→



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

第2行乘 $(-\frac{1}{2})$
 $\longrightarrow$

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{B} & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 \text{@} & 0 & 0 & -3 & 3 \\
 & & & & \text{C} \\
 & & & & \text{A}
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 \text{第2行乘}(-\frac{1}{2}) & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \rightarrow & \text{B} & & & \text{C} \\
 & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{第2行乘3加到第3行} \\
 \rightarrow
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘}(-\frac{1}{2}) & \text{B} & & & \text{C} \\
 @ & 0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 \longrightarrow & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{第2行乘3加到第3行} \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{B} & & & & \text{C} \\
 @ & 0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & -1 & 1 \\
 \text{B} & 0 & 0 & 1 \\
 @ & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & -3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \text{C} \\
 \text{A}
 \end{array}$$

第2行乘 $(-\frac{1}{2})$ → 第2行乘3加到第3行 →

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & -1 & 1 \\
 \text{B} & 0 & 0 & 1 \\
 @ & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \text{C} \\
 \text{A}
 \end{array}$$

第2行乘 (-1) 加到第1行 →



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘}(-\frac{1}{2}) & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘3加到第3行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘}(-1) \text{加到第1行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 \text{第2行乘}(-1) \text{加到第1行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

• 程组的增广矩阵经过初等行变换化为了规%阶梯形矩阵，
原 • 程组同解于以规%阶梯形矩阵 增广矩阵的 • 程组

$$\begin{array}{rcl}
 8 & & \\
 \geq & x_1 & -x_2 = 2 \\
 & & x_3 = -1 ; \\
 & & 0 = 0
 \end{array}$$



2.2 线性 • 程组的高斯消元 {

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘}(-\frac{1}{2}) & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘3加到第3行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & -3 & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 \text{第2行乘}(-1) \text{加到第1行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & 1 \\
 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 \text{第2行乘}(-1) \text{加到第1行} & \text{B} & & & \text{C} \\
 \text{--->} & @0 & 0 & 1 & -1 \text{A} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

• 程组的增广矩阵经过初等行变换化为了规%阶梯形矩阵，
原 • 程组同解于以规%阶梯形矩阵 增广矩阵的 • 程组

$$\begin{array}{rcl}
 8 & & \\
 \geq & x_1 - x_2 & = 2 \\
 & x_3 & = -1 \\
 & 0 & = 0
 \end{array}
 \quad ; \text{ 即 }
 \begin{array}{rcl}
 (& x_1 & = x_2 + 2 \\
 & x_3 & = -1
 \end{array}$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

由
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$
 知, 知量 x_2 是可以任意取值的, 且每

当 x_2 任意取定一个值 k 时, x_1 都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$:



2.2 线性·程组的高斯消元 {

由 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 知, 知量 x_2 是可以任意取值的, 且每

当 x_2 任意取定一个值 k 时, x_1 都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$:

0 当任意取定 $x_2 = k$ 时, 都可以得到原·程组的一个解:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ A \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ B \\ A \end{matrix} \begin{matrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ A \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ B \\ A \end{matrix} \begin{matrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{matrix}.$$

由于 k 可以取任意数, 所以原·程组有 穷多解.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

由 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ 知, 知量 x_2 是可以任意取值的, 且每

当 x_2 任意取定一个值 k 时, x_1 都可以被其 一确定 $x_1 = k + 2$;
 0 当任意取定 $x_2 = k$ 时, 都可以得到原·程组的一个解:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ A \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ B \\ A \end{matrix} \begin{matrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ A \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ B \\ A \end{matrix} \begin{matrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{matrix}.$$

由于 k 可以取任意数, 所以原·程组有 无穷多解.

$$\text{其解集} \geq \begin{matrix} B \\ B \\ A \end{matrix} \begin{matrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{matrix} \mid k \text{ 任意数} \geq .$$



2.2 线性·程组的高斯消元 {

也可以用
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$
 来表示这 无穷多个解. 称 线性·

程组的一**般解**, 其中以主元 系数的 知量 $x_1; x_3$ 称 **主变量**,
知量 x_2 称 **自由 知量**.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

也可以用
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$
 来表示这 无穷多个解. 称 线性·

程组的一般解, 其中以主元 系数的 知量 $x_1; x_3$ 称 主变量, 知量 x_2 称 自由 知量.

线性·程组的一般解就是用含自由 知量的式子来表示主变量.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

也可以用
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$
 来表示这 无穷多个解. 称 线性·

程组的一般解, 其中以主元 系数的 知量 $x_1; x_3$ 称 主变量, 知量 x_2 称 自由 知量.

线性·程组的一般解就是用含自由 知量的式子来表示主变量.

例1.1中, ·程组的增广矩阵经过初等行变换化 规 % 形阶 梯形矩阵后, 主元个数与 ·程个数相等, ·程组有 一解.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

也可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

来表示这无穷多个解. 称线性·

程组的一般解, 其中以主元系数的知量 x_1, x_3 称主变量, 知量 x_2 称自由知量.

线性·程组的一般解就是用含自由知量的式子来表示主变量.

例1.1中, 线性·程组的增广矩阵经过初等行变换化规形阶梯形矩阵后, 主元个数与方程个数相等, 线性·程组有一解.

例2.2中, 线性·程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵后, 常数列(增广矩阵的最后一列)出现了主元, 即阶梯形矩阵对应的线性·程组出现“ $0 = d$ (其中 d 是非零数)”这样的矛盾方程, 这时线性·程组的解集为空集, 即, 线性·程组无解.





2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数 2，小于未知量个数3.这时线性方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，



2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数 2，小于未知量个数3.这时线性方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾方程
 $0 = d$ (其中 d 是非零数)，线性方程组无解；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.3中，·程组的增广矩阵经过初等行变换化成规%阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 $\checkmark$ 零行数 2，小于 知量个数3.这时·程组有 无穷多解.

一般结论：线性·程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规%阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾·程“ $0 = d$ (其中 d 是 $\checkmark$ 零数)”，·程组 解；

若常数列没有主元，则·程组有解.



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.3中，·程组的增广矩阵经过初等行变换化成规%阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 s 零行数 > 2 ，小于 知量个数3.这时·程组有 无穷多解.

一般结论：线性·程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规%阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾·程“ $0 = d$ (其中 d 是 s 零数)”，·程组 解；

若常数列没有主元，则·程组有解.

在常数列没有主元时，

若 s 零行的个数(也是主元个数)等于 知量的个数，则·程组有 一解；



2.2 线性·程组的高斯消元 {

例2.3中，·程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且 s 零行数 > 2 ，小于 知量个数3.这时·程组有 无穷多解.

一般结论：线性·程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾·程“ $0 = d$ (其中 d 是 s 零数)”，·程组 解；

若常数列没有主元，则·程组有解.

在常数列没有主元时，

若 s 零行的个数(也是主元个数)等于 知量的个数，则·程组有 一解；

若 s 零行的个数(也是主元个数)小于 知量的个数，则原·程组有 无穷多解.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

