线 代数
第二章：线 方程组

州 院 数 与统计 院

目录

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

上节的 ~ 2.1、 ~ 2.2、 ~ 2.3，分别 出了线 方程组有唯一解、无解、有无穷多解的情 .

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

上节的 ~2.1、 ~2.2、 ~2.3，分别　出了线　方程组有唯一解、无解、有无穷多解的情　.

增广矩阵经过初等　变换化为阶梯　(或规范阶梯　)矩阵以后，常数列(增广矩阵的最后一列)是否出现主元，即是否出现"$0 = d (d \neq 0)$"　的情况，是判别线　方程组是否有解的依据.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

上节的 ~ 2.1、 ~ 2.2、 ~ 2.3，分别 出了线 方程组有唯一解、

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

第二种情　：阶梯　(或规范阶梯　)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯　(或规范阶梯　)矩阵的非零　的数为r，即主元　数为r .

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

第二种情 ：阶梯 (或规范阶梯)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯 (或规范阶梯)矩阵的非零 的数为r，即主元 数为r .这也可能出现以下三种情 ：

1.$r = n$(n 未知 þ 都是主变 þ)

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

第二种情　：阶梯　(或规范阶梯　)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯　(或规范阶梯　)矩阵的非零　的数为r，即主元　数为r .这也可能出现以下三种情　：

1.$r = n$(n　未知 þ 都是主变 þ)

由于n　主元应分布在不同的列，因而阶梯　矩阵的　式是

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & e_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & e_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

其中$c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$是$n$ 主元，都不是零，

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

其中$c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$是$n$ 主元，都不是零，

再经过适当的初等 变换，进一步将其化为规范阶梯

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

即原方程组有唯一的解向 þ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$2. r < n$(主元　数　于未知 b　数)

假设r　主元分布在第1列，第j_2列，...，第j_r列，则相应的阶梯　矩阵为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$c_{11}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$是$r$　都不为0的主元.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

2.$r < n$(主元 数 于未知þ 数)

假设r 主元分布在第1列，第j_2列，…，第j_r列，则相应的阶梯 矩阵为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$c_{11}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$是$r$ 都不为0的主元.经过进一步的初等变换，再将其化为规范阶梯

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix}
\color{red}{1} & \cdots & e_{1(j_2-1)} & 0 & \cdots & e_{1(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & \cdots & e_{2(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{2n} & d_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & \cdots & e_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & e_{1(j_2-1)} & 0 & \cdots & e_{1(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & e_{2(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & e_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以与原方程组同解的方程组是

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + e_{1(j_2-1)}x_{j_2-1} + \cdots + e_{1(j_r-1)}x_{j_r-1} + \cdots + e_{1n}x_n = d_1 \\ x_{j_2} + \cdots + e_{2(j_r-1)}x_{j_r-1} + \cdots + e_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_{j_r} + \cdots + e_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

这 þ，$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$是方程组的主变 þ，其余$n-r$　未知 þ 是自由未知 þ .

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

这 þ，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变 þ，其余$n-r$　未知 þ 是自由未知 þ .

把主变 þ 保留在方程的左侧，自由未知 þ 移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n\ r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n\ r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n\ r}} \end{cases}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

这 þ， $x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ 是方程组的主变 þ， 其余 $n-r$ 未知 þ 是自由未知 þ .

把主变 þ 保留在方程的左侧，自由未知 þ 移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

其中 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ 是(主变 þ $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知 þ， $l_{ij}(i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., n-r)$ 是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ 移至方程右侧以后的系数.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

这 þ，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变 þ，其余$n-r$　未知 þ 是自由未知 þ .

把主变 þ 保留在方程的左侧，自由未知 þ 移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n\ \ r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n\ \ r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n\ \ r}} \end{cases}$$

其中$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n\ \ r}}$是(主变 þ $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知 þ，$l_{ij}(i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., n-r)$是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n\ \ r}}$移至方程右侧以后的系数.

由于$n-r$　自由未知 þ $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n\ \ r}}$可以取无穷多组值，因此方程组这时有无穷多　解.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

这þ，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变þ，其余$n-r$　未知þ是自由未知þ.

把主变þ保留在方程的左侧，自由未知þ移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

其中$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$是(主变þ$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知þ，$l_{ij}(i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., n-r)$是$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$移至方程右侧以后的系数.

由于$n-r$　自由未知þ$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$可以取无穷多组值，因此方程组这时有无穷多　解.上式是方程组一般解的表示.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

3.$r > n$(主元　数大于未知 þ　数)

n元方程组的增广矩阵共有$n+1$列，由于r　主元分布在不同的列，　以$r \leq n+1$.于是第$n+1$　的主元c_{n+1}位于第$n+1$列.从而第$n+1$　方程为$0 = c_{n+1}$，这与第二种情　的已知条件矛盾.

综上述，有以下结论：

定 n 2.1 m　方程，n　未知 þ 的线　方程组的解有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多　解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$3. r > n$(主元 数大于未知 þ 数)

n元方程组的增广矩阵共有$n+1$列，由于r 主元分布在不同的列， 以$r \leq n+1$.于是第$n+1$ 的主元c_{n+1}位于第$n+1$列.从而第$n+1$ 方程为$0 = c_{n+1}$，这与第二种情 的已知条件矛盾.

综上述，有以下结论：

定 n 2.1 m 方程，n 未知 þ 的线 方程组的解有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多 解.

把线 方程组的增广矩阵经过初等 变换化成阶梯 (或规范阶梯)后，若阶梯 (或规范阶梯)矩阵中的常数列(最后一列)出现了主元，则其对应的方程是“$0 = d (d \neq 0)$”，这时原方程组无解；

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

若阶梯　(或规范阶梯　)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

若阶梯　(或规范阶梯　)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯　(或规范阶梯　)矩阵的非零　　数r等于未知 þ　数n，则方程组有唯一解；

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

若阶梯　(或规范阶梯　)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯　(或规范阶梯　)矩阵的非零　　数r等于未知 þ　数n，则方程组有唯一解;

如果非零　的　数$r < n$，则原方程组有无穷多　解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

若阶梯 (或规范阶梯)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯 (或规范阶梯)矩阵的非零 数r等于未知 þ 数n，则方程组有唯一解;

如果非零 的 数$r<n$，则原方程组有无穷多 解.

~ 2.4 a为何值时，下述线 方程组有解? 当有解时，求出的 有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3-x_4=a \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4 \end{cases}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1　乘(-1)加到第3}}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第4}]{\text{第1　乘(-1)加到第3}}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$,

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第4}]{\text{第1　乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\ \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第4}]{\text{第1　乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2 乘(-1)加到第3}}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2 乘(-1)加到第4}]{\text{第2 乘(-1)加到第3}}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

解：线　方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进　初等　变换，将其化为阶梯　：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1　乘(-1)加到第4}]{\text{第1　乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2　乘(-1)加到第4}]{\text{第2　乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\&&&&\\&&&&\end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2 乘(-1)加到第4}]{\text{第2 乘(-1)加到第3}} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{matrix} \right.$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2 乘(-1)加到第4}]{\text{第2 乘(-1)加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

解：线 方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进 初等 变换，将其化为阶梯 ：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第4}]{\text{第1 乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2 乘(-1)加到第4}]{\text{第2 乘(-1)加到第3}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&0&0&0&2-a\\0&0&1&1&2-a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第3、4}}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯　矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯 矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线 方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯　矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线　方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等　变换进一步化为规范阶梯

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$ 时，阶梯　矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线　方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等　变换进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯　矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线　方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等　变换进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3　加到第1}]{\text{第3　乘(-2)加到第2}}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯　矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线　方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等　变换进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3　加到第1}]{\text{第3　乘(-2)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a=0$时，阶梯 矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

以，线 方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等 变换进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3 加到第1}]{\text{第3 乘(-2)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

第2　乘(-1)加到第1

$\longrightarrow$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

第2 乘(-1)加到第1

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

第2　乘(-1)加到第1

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2 乘(-1)加到第1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以规范阶梯 矩阵为增广矩阵的线 方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +5x_4 = -1 \\ \qquad x_2 \qquad -3x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2　乘(-1)加到第1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以规范阶梯　矩阵为增广矩阵的线　方程组是

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +5x_4 = -1 \\ \quad x_2 \quad\quad -3x_4 = 2 \\ \quad\quad x_3 \quad +x_4 = 0 \end{cases}$$

原方程组的通解是 $\begin{cases} x_1 = -1-5x_4 \\ x_2 = 2+3x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$，

其中，x_4是自由未知þ.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

齐次线 方程组不存在“无解”情 ， 以对齐次线 方程组的问题是：如何判断齐次线 方程组是否有非零解(有无穷多 解)？

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

齐次线 方程组不存在“无解”情 ， 以对齐次线 方程组的问题是：如何判断齐次线 方程组是否有非零解(有无穷多 解)？

由于齐次线 方程组的常数项均为0， 以齐次线 方程组的增广矩阵中的常数列可以省略，即m 方程n 未知 þ 的齐次线 方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
与其系数按照相对位置定义的系数矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$之间是相互的唯一确定的.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

齐次线　方程组的增广矩阵的最后一列元　都是0，对其进　初等　变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线　方程组的系数矩阵进　初等　变换即可.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

齐次线　方程组的增广矩阵的最后一列元　都是0，对其进　初等　变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线　方程组的系数矩阵进　初等　变换即可. | 用定 n 2.1，有如下结论

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

齐次线　方程组的增广矩阵的最后一列元　都是0，对其进初等　变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线　方程组的系数矩阵进　初等　变换即可. | 用定 n 2.1，有如下结论

推论2.1 m　方程n　未知 p 的齐次线　方程组只有零(平凡)解的充要条件是：　的系数矩阵经过初等　变换化成的阶梯，非零　的　数(主元的　数)$r = n$.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

齐次线 方程组的增广矩阵的最后一列元 都是0，对其进 初等 变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线 方程组的系数矩阵进 初等 变换即可. | 用定 n 2.1，有如下结论

推论2.1 m 方程n 未知 þ 的齐次线 方程组只有零(平凡)解的充要条件是： 的系数矩阵经过初等 变换化成的阶梯 ，非零 的 数(主元的 数)$r = n$.

有非零(非平凡)解的充要条件是：系数矩阵经过初等 变换化成的阶梯 ，非零 的 数(主元的 数)$r < n$.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

齐次线　方程组的增广矩阵的最后一列元　都是0，对其进　初等　变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线　方程组的系数矩阵进　初等　变换即可. | 用定 n 2.1，有如下结论

推论2.1　m　方程n　未知 þ 的齐次线　方程组只有零(平凡)解的充要条件是：　的系数矩阵经过初等　变换化成的阶梯　，非零　的　数(主元的　数)$r = n$.

有非零(非平凡)解的充要条件是：系数矩阵经过初等　变换化成的阶梯　，非零　的　数(主元的　数)$r < n$.

从推论2.1又可以得到：

推论2.2　m　方程n　未知 þ 的齐次线　方程组，若$m < n$，则　一定有非零解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线 方程组的系数矩阵经过初等变换化成阶梯 ， 的非零 数$r \leq m < n$， 以 有非零解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线 方程组的系数矩阵经过初等变换化成阶梯 ， 的非零 数$r \leq m < n$， 以 有非零解.

~ 2.5 a 为何值时，下述齐次线 方程组只有零解？有非零解？有非零解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线　方程组的系数矩阵经过初等变换化成阶梯　，　的非零　　数$r \le m < n$，　以　有非零解.

~2.5 a 为何值时，下述齐次线　方程组只有零解？有非零解？有非零解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

解：齐次线　方程组的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，对其实施初等　变换，将其化为阶梯

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1 乘(-1)加到第2}}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第3}]{\text{第1　乘(-1)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第3}]{\text{第1　乘(-1)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2　乘3加到第3}}$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第3}]{\text{第1　乘(-1)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2　乘3加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1 乘(-2)加到第3}]{\text{第1 乘(-1)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2 乘3加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

当$-3a-2=0$，即$a=-\frac{2}{3}$时，齐次线 方程组的系数矩阵 化阶梯 矩阵的非零 数为3，等于方程的未知 数，方程组有唯一的零解.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1　乘(-2)加到第3}]{\text{第1　乘(-1)加到第2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2　乘3加到第3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

当$-3a-2=0$，即$a=-\frac{2}{3}$时，齐次线　方程组的系数矩阵　化阶梯　矩阵的非零　数为3，等于方程的未知 þ　数，方程组有唯一的零解.

当$-3a-2=0$，即$a=-\frac{2}{3}$时，齐次线　方程组的系数矩阵　化阶梯　矩阵的非零　数为2，　于方程的未知 þ　数3，方程组有非零解.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

对阶梯 的系数矩阵进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2 乘(-1)加到第1}}$$

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

对阶梯 的系数矩阵进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2 乘(-1)加到第1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

对阶梯　的系数矩阵进一步化为规范阶梯

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2　乘(-1)加到第1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

以原齐次线　方程组在$a = -\frac{2}{3}$时的通解为

$$\begin{cases} x_1 & = -\frac{4}{3}x_3 \\ x_2 & = \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

其中，x_3是自由未知þ .

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

下面， 出解一般线 方程组的方法和步骤：

第一步： 出增广矩阵. 出线 方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断．若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元　数等于未知 p　数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元　数　于未知 p　数，则方程组有无穷多解.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元　数等于未知 p　数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元　数　于未知 p　数，则方程组有无穷多解.

第　步：进一步化矩阵为规范阶梯　矩阵.

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元　数等于未知 p　数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元　数　于未知 p　数，则方程组有无穷多解.

第　步：进一步化矩阵为规范阶梯　矩阵.在线　方程组有解时，对$\overline{B}$进　初等　变换，化$\overline{B}$ 为规范阶梯　矩阵$\overline{C}$.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

下面，　出解一般线　方程组的方法和步骤：

第一步：　出增广矩阵.　出线　方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等　变换化增广矩阵为阶梯　矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯　矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯　矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元　数等于未知 p　数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元　数　于未知 p　数，则方程组有无穷多解.

第　步：进一步化矩阵为规范阶梯　矩阵.在线　方程组有解时，对$\overline{B}$进　初等　变换，化$\overline{B}$为规范阶梯　矩阵$\overline{C}$.

第五步：　出解(或通解).

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

下面， 出解一般线 方程组的方法和步骤：

第一步： 出增广矩阵. 出线 方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等 变换化增广矩阵为阶梯 矩阵.对$\overline{A}$实施初等变换，将其化为阶梯 矩阵$\overline{B}$；

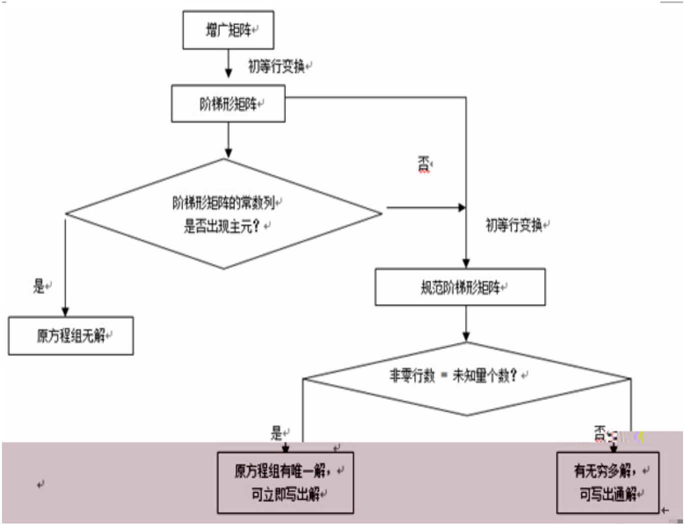
第三步：判断. 若阶梯 矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元 数等于未知 p 数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元 数 于未知 p 数，则方程组有无穷多解.

第 步：进一步化矩阵为规范阶梯 矩阵.在线 方程组有解时，对$\overline{B}$进 初等 变换，化$\overline{B}$ 为规范阶梯 矩阵$\overline{C}$.

第五步： 出解(或通解).由规范阶梯 矩阵$\overline{C}$可以确定自由未知 p (如果有的话)，直接 出其解(或通解).

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

其基本步骤可以用如下流程图表示



2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

对线　方程组引入增广矩阵之后，建 á 了线　方程组与矩阵之间的一一对应关系，｜用增广矩阵在　式上简化了线　方程组的表达方式，对增广矩阵进　初等　变换简化了线　方程组“加减消元”过程的表达　式.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

对线　方程组引入增广矩阵之后，建 á 了线　方程组与矩阵之间的一一对应关系，｜用增广矩阵在　式上简化了线　方程组的表达方式，对增广矩阵进　初等　变换简化了线　方程组“加减消元”过程的表达　式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知 þ 符号以及运　符号的线　方程组，以未知 þ 的位置 5 代替未知 þ，　以线　方程组增广矩阵表示以及初等　变换解法，本质上和中　熟知的加减消元法是完全一致的.

2.3 线　方程组解的情况及其判断准则

对线　方程组引入增广矩阵之后，建 á 了线　方程组与矩阵之间的一一对应关系，｜用增广矩阵在　式上简化了线　方程组的表达方式，对增广矩阵进　初等　变换简化了线　方程组“加减消元”过程的表达　式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知 þ 符号以及运　符号的线　方程组，以未知 þ 的位置 5 代替未知 þ，　以线　方程组增广矩阵表示以及初等　变换解法，本质上和中　熟知的加减消元法是完全一致的.

问题是：是否还可以引入其　的　具，5　究一般的线　方程组？能不能　出一种“好的　具”，　究线　方程组有无穷多解时的解集结构？

2.3 线 方程组解的情况及其判断准则

对线 方程组引入增广矩阵之后，建 á 了线 方程组与矩阵之间的一一对应关系，| 用增广矩阵在 式上简化了线 方程组的表达方式，对增广矩阵进 初等 变换简化了线 方程组“加减消元”过程的表达 式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知 þ 符号以及运 符号的线 方程组，以未知 þ 的位置 5 代替未知 þ， 以线 方程组增广矩阵表示以及初等 变换解法，本质上和中 熟知的加减消元法是完全一致的.

问题是：是否还可以引入其 的 具，5 究一般的线 方程组？能不能 出一种“好的 具”， 究线 方程组有无穷多 解时的解集结构？在下一章将引入“数组向 þ ”这 “ 具”.

Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com