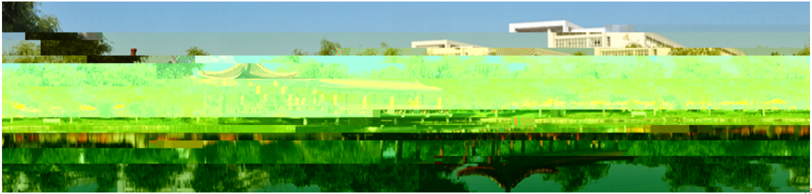
，性代数
第三章： • 量空间

宿州学院 数学与统计学院



目录

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

- 量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)的 质区 可± 从± e三个方面刻画

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

•量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)的 质区 可±从±e三个方面刻画

1.从，性组 看(•量组，性 f 性的定Â)

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

•量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)的 质区 可±从±e三个方面刻画

1.从，性组 看(•量组，性 f 性的定Â)

(1) •量组 $_1;\ _2; \cdots;\ _m$ ，性 f ，存在 全为零的X数$k_1; k_2; \cdots; k_m$，使得$k_1\ _1 + k_2\ _2 + \quad + k_m\ _m = 0$.

3.3 •量组的，性 *f* 与，性无 (2)

•量组的，性 *f* 性(，性 *f* 、，性无)的 质区 可± 从± e 三个方面刻画

1.从，性组 看(•量组，性 *f* 性的定 Â)

(1) •量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$，性 *f* ，存在 全为零的 X 数 $k_1; k_2; \cdots; k_m$，使得 $k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + \quad + k_m \ _m = 0$.

(2) •量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$，性无 ，只有 X 数 $k_1; k_2; \cdots; k_m$ 全为零时，有 $k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + \quad + k_m \ _m = 0$.

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

2.从，性 出看

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

2.从，性 出看

(1) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m\ (m\ \ 2)$，性 f ，$_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中至少有˜个•量可±由其余的•量，性 出.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

2.从，性 出看

(1) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m\ (m\quad 2)$ ，性 f ， $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中至少有˜个•量可±由其余的•量，性 出.

(2) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m\ (m\quad 2)$ ，性无 ， $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中每˜个•量都 可±由其余的•量，性 出.

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

(1)证明 充分性

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

(1)证明 充分性

设•量组 $_1;$ $_2; \cdots;$ $_m$ $(m$ $2)$中存在•量 $_k$可±由其余的•量，性 出,

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

(1)证明 充分性

设 • 量组 $_1;\ _2; \cdots ;\ _m\ (m\quad 2)$中存在 • 量 $_k$可 ± 由其余的 • 量，性 出，即，存在 X 数$l_1; ; \cdots ; l_{k-1}; l_{k+1}; \cdots ; l_m$，使得

$$_k = l_1\ _1 + \quad + l_{k-1}\ _{k-1} + l_{k+1}\ _{k+1} + \quad + l_m\ _m;$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

(1)证明 充分性

设•量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m \ (m \quad 2)$中存在•量 $_k$可±由其余的•量，性 出，即，存在X数$l_1; \cdots; l_{k-1}; l_{k+1}; \cdots; l_m$，使得

$$_k = l_1 \ _1 + \quad + l_{k-1} \ _{k-1} + l_{k+1} \ _{k+1} + \quad + l_m \ _m;$$

两 同时加上 $_k$ 的负•量($_k$)，得

$$l_1 \ _1 + \quad + l_{k-1} \ _{k-1} + (\quad 1) \ _k + l_{k+1} \ _{k+1} + \quad + l_m \ _m = 0;$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

(1)证明 充分性

设•量组 $_1;\ \ _2;\cdots;\ \ _m\ (m\ \ \ 2)$中存在•量 $_k$可±由其余的•量，性 出，即，存在X数$l_1;;\cdots;l_{k-1};l_{k+1};\cdots;l_m$，使得

$$_k = l_1\ \ _1 + \quad + l_{k-1}\ \ _{k-1} + l_{k+1}\ \ _{k+1} + \quad + l_m\ \ _m;$$

两 同时加上 $_k$ 的负•量($_k$)，得

$$l_1\ \ _1 + \quad + l_{k-1}\ \ _{k-1} + (\ \ 1)\ \ _k + l_{k+1}\ \ _{k+1} + \quad + l_m\ \ _m = 0;$$

X数中至少有˜个 $1 \neq 0$，所± $_1;\ \ _2;\cdots;\ \ _m$ ，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

‡ 性

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

‡ 性

设 • 量组 $_1;\ _2;:::;\ _m\,(m\quad 2)$ ，性 f ，

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

‡ 性

设 • 量组 $_1; \quad _2; : : : ; \quad _m \ (m \quad 2)$，性 f ，则存在 全为零的 X 数$k_1; k_2; :::; k_m$，使得

$$k_1 \quad _1 + k_2 \quad _2 + \quad + k_m \quad _m = 0:$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

‡性

设•量组 $_1;\ _2;\ :::;\ _m$ $(m\ 2)$，性 f ，则存在 全为零的X数$k_1;k_2;:::;k_m$，使得

$$k_1\ _1+k_2\ _2+\quad +k_m\ _m=0:$$

由于$k_1;k_2;:::;k_m$ 全为零，所±至少存在$k_i \neq 0$，从而，

$$k_i\ _i=k_1\ _1+\quad +k_{i-1}\ _{i-1}+k_{i+1}\ _{i+1}+\quad +k_m\ _m;$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

‡性

设•量组 $_1; \; _2; : : : ; \; _m \, (m \quad 2)$，性 f ，则存在 全为零的 X 数 $k_1; k_2; :::; k_m$ ，使得

$$k_1 \; _1 + k_2 \; _2 + \quad + k_m \; _m = 0:$$

由于 $k_1; k_2; :::; k_m$ 全为零，所 ± 至少存在 $k_i \not= 0$，从而，

$$k_i \; _i = k_1 \; _1 + \quad + k_{i-1} \; _{i-1} + k_{i+1} \; _{i+1} + \quad + k_m \; _m;$$

两 同乘 k_i 的倒数得

$$_i = (\; \frac{k_1}{k_i}) \; _1 + \quad + (\; \frac{k_{i-1}}{k_i}) \; _{i-1} + (\; \frac{k_{i+1}}{k_i}) \; _{i+1} + \quad + (\; \frac{k_m}{k_i}) \; _m:$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

‡性

设•量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m \ (m \ \ 2)$，性 f ，则存在 全为零的 X 数 $k_1; k_2; \cdots; k_m$ ，使得

$$k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + \quad + k_m \ _m = 0:$$

由于 $k_1; k_2; \cdots; k_m$ 全为零，所 ± 至少存在 $k_i \neq 0$，从而，

$$k_i \ _i = k_1 \ _1 + \quad + k_{i-1} \ _{i-1} + k_{i+1} \ _{i+1} + \quad + k_m \ _m;$$

两 同乘 k_i 的倒数得

$$_i = (\ \frac{k_1}{k_i}) \ _1 + \quad + (\ \frac{k_{i-1}}{k_i}) \ _{i-1} + (\ \frac{k_{i+1}}{k_i}) \ _{i+1} + \quad + (\ \frac{k_m}{k_i}) \ _m:$$

即,存在•量 $_i$ 可 ± 由其余的•量 $_1; \cdots; \ _{i-1}; \ _{i+1}; \cdots; \ _m$ ，性出.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注： ，性 f 的•量组，存在 全为零的 X 数使其组 为零，而 X 数 为零的那个•量就可 ± 由其余的•量，性 出.

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

注：，性 f 的 • 量组，存在 全为零的 X 数使其组 为零，而 X 数 为零的那个 • 量就可 ± 由其余的 • 量，性 出.

3.从齐次，性方程组看

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：，性 f 的•量组，存在 全为零的 X 数使其组 为零，而 X 数 为零的那个•量就可±由其余的•量，性 出.

3.从齐次，性方程组看

(1) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$，性 f ，齐次，性方程组 $x_1\ _1 + x_2\ _2 + \quad + x_m\ _m = 0$有非零解.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：，性 f 的•量组，存在 全为零的 X 数使其组 为零，而 X 数 为零的那个•量就可±由其余的•量，性 出.

3.从齐次，性方程组看

(1) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$，性 f ，齐次，性方程组 $x_1\ _1+x_2\ _2+\ \ +x_m\ _m=0$有非零解.

(2) •量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$，性无 ，齐次，性方程组 $x_1\ _1+x_2\ _2+\ \ +x_m\ _m=0$只有零解.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 ${}_1; {}_2; \cdots; {}_m$ 是F^n中的•量组，由 ${}_1; {}_2; \cdots; {}_m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 是F^n中的•量组，由 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

例3.3 若•量组的˜个 分组，性 f ，则整个•量组•，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 $_1; _2; \cdots; _m$ 是F^n中的•量组，由 $_1; _2; \cdots; _m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

例3.3 若•量组的˜个 分组，性 f ，则整个•量组•，性 f .

如，若 $_1; _3; _4$是•量组 $_1; _2; _3; _4; _5$的˜个，性 f 的 分组，则存在 全为0的X数$l_1; l_3; l_4$，使得

$$l_1 \ _1 + l_3 \ _3 + l_4 \ _4 = 0$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 ${}_1;\ {}_2;\cdots;\ {}_m$ 是F^n中的•量组，由 ${}_1;\ {}_2;\cdots;\ {}_m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

例3.3 若•量组的˜个 分组，性 f ，则整个•量组•，性 f .

如，若 ${}_1;\ {}_3;\ {}_4$是•量组 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3;\ {}_4;\ {}_5$的˜个，性 f 的 分组，则存在 全为0的 X 数$l_1; l_3; l_4$，使得

$$l_1\ {}_1 + l_3\ {}_3 + l_4\ {}_4 = 0$$

所±，存在 全为0的 X 数$l_1; 0; l_3; l_4; 0$，满足

$$l_1\ {}_1 + 0\ {}_2 + l_3\ {}_3 + l_4\ {}_4 + 0\ {}_5 =$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 是F^n中的•量组，由 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

例3.3 若•量组的˜个 分组，性 f ，则整个•量组•，性 f .

如，若 $_1;\ _3;\ _4$是•量组 $_1;\ _2;\ _3;\ _4;\ _5$的˜个，性 f 的 分组，则存在 全为0的Ｘ数$l_1; l_3; l_4$，使得

$$l_1\ _1 + l_3\ _3 + l_4\ _4 = 0$$

所±，存在 全为0的Ｘ数$l_1; 0; l_3; l_4; 0$，满足

$$l_1\ _1 + 0\ _2 + l_3\ _3 + l_4\ _4 + 0\ _5 = l_1\ _1 + l_3\ _3 + l_4\ _4 = 0$$

所±， $_1;\ _2;\ _3;\ _4;\ _5$，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

设 $\ _1;\ _2;\cdots;\ _m$ 是F^n中的•量组，由 $\ _1;\ _2;\cdots;\ _m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的˜个 分组.

例3.3 若•量组的˜个 分组，性 f ，则整个•量组•，性 f .

如，若 $\ _1;\ _3;\ _4$是•量组 $\ _1;\ _2;\ _3;\ _4;\ _5$的˜个，性 f 的 分组，则存在 全为0的X数$l_1;l_3;l_4$，使得

$$l_1\ _1+l_3\ _3+l_4\ _4=0$$

所±，存在 全为0的X数$l_1;0;l_3;l_4;0$，满足

$$l_1\ _1+0\ _2+l_3\ _3+l_4\ _4+0\ _5=l_1\ _1+l_3\ _3+l_4\ _4=0$$

所±，$\ _1;\ _2;\ _3;\ _4;\ _5$，性 f .

更˜般的证明同学们可±自行看书.

3.3 •量组的，性 ƒ 与，性无 (2)

注：

① 例3.3的逆否命题：，性无 的•量组的 分组˜定，性无 . 通俗地 述为：

分 ƒ ，整体˜定 ƒ ；整体无 ， 分˜定无 .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：

① 例3.3的逆否命题：，性无 的•量组的 分组˜定，性无 . 通俗地 述为：

分 f ，整体˜定 f ；整体无 ， 分˜定无 .

② 例3.3的逆命题 成立.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：

① 例3.3的逆否命题：，性无 的•量组的 分组˜定，性无 . 通俗地 述为：

分 f ，整体˜定 f ；整体无 ， 分˜定无 .

② 例3.3的逆命题 成立. 即

整体，性 f ， 分未 ，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：

① 例3.3的逆否命题：，性无 的•量组的 分组˜定，性无 . 通俗地 述为：

分 f ，整体˜定 f ；整体无 ， 分˜定无 .

② 例3.3的逆命题 成立. 即

整体，性 f ， 分未 ，性 f .

如 $_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$是，性 f 的，但它有两个•量的 分组都是，性无 的.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 ${}_1; {}_2; {}_3$是F^n中，性无 的•量组，且

$${}_1 = {}_1 + {}_2;\ {}_2 = {}_2 + {}_3;\ {}_3 = {}_3 + {}_1$$

证明：•量组 ${}_1; {}_2; {}_3$ •，性无 .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$是F^n中，性无 的•量组，且

$${}_1 = {}_1 + {}_2;\quad {}_2 = {}_2 + {}_3;\quad {}_3 = {}_3 + {}_1$$

证明：•量组 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$ •，性无 .

证明 ‡证明 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$•，性无 ，就是‡证明由组 $k_1\,{}_1 + k_2\,{}_2 + k_3\,{}_3 = 0$ ˜定可±推出X数$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 $_1;\ _2;\ _3$是F^n中，性无 的•量组，且

$$_1 = \ _1 + \ _2;\ \ _2 = \ _2 + \ _3;\ \ _3 = \ _3 + \ _1$$

证明：•量组 $_1;\ _2;\ _3$ •，性无 .

证明 ‡证明 $_1;\ _2;\ _3$•，性无 ，就是‡证明由组 $k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 = 0$ ˜定可±推出 X 数$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，而 $_1 = \ _1 + \ _2;\ \ _2 = \ _2 + \ _3;\ \ _3 = \ _3 + \ _1$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 $_1; \ _2; \ _3$ 是 F^n 中，性无 的•量组，且

$$ {}_1 = {}_1 + {}_2; \ {}_2 = {}_2 + {}_3; \ {}_3 = {}_3 + {}_1 $$

证明：•量组 $_1; \ _2; \ _3$ •，性无 .

证明 ‡证明 $_1; \ _2; \ _3$ •，性无 ，就是‡证明由组 $k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + k_3 \ _3 = 0$ ˜定可±推出X数 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，而 $_1 = \ _1 + \ _2; \ _2 = \ _2 + \ _3; \ _3 = \ _3 + \ _1$

所±

$$ k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + k_3 \ _3 = k_1(\ _1 + \ _2) + k_2(\ _2 + \ _3) + k_3(\ _3 + \ _1) $$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 $_1;\ _2;\ _3$是F^n中，性无 的•量组，且

$$_1 = \ _1 + \ _2;\ _2 = \ _2 + \ _3;\ _3 = \ _3 + \ _1$$

证明：•量组 $_1;\ _2;\ _3$ •，性无 .

证明 ‡证明 $_1;\ _2;\ _3$•，性无 ，就是‡证明由组

$k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 = 0$ ˜ 定可±推出 X 数$k_1 = k_2 = k_3 = 0$， 而

$_1 = \ _1 + \ _2;\ _2 = \ _2 + \ _3;\ _3 = \ _3 + \ _1$

所±

$$\begin{aligned} k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 &= k_1(\ _1 + \ _2) + k_2(\ _2 + \ _3) + k_3(\ _3 + \ _1) \\ &= (k_1 + k_3)\ _1 + (k_1 + k_2)\ _2 + (k_2 + k_3)\ _3 \end{aligned}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.4 设•量组 $_1;\ _2;\ _3$是F^n中，性无 的•量组，且

$$_1 = \ _1 + \ _2;\ _2 = \ _2 + \ _3;\ _3 = \ _3 + \ _1$$

证明：•量组 $_1;\ _2;\ _3$ •，性无 .

证明 ‡证明 $_1;\ _2;\ _3$•，性无 ，就是‡证明由组

$k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 = 0$ ˜定可±推出X数$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，而

$_1 = \ _1 + \ _2;\ _2 = \ _2 + \ _3;\ _3 = \ _3 + \ _1$

所±

$$\begin{aligned} k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 &= k_1(\ _1 + \ _2) + k_2(\ _2 + \ _3) + k_3(\ _3 + \ _1) \\ &= (k_1 + k_3)\ _1 + (k_1 + k_2)\ _2 + (k_2 + k_3)\ _3 \end{aligned}$$

从而，

$$k_1\ _1 + k_2\ _2 + k_3\ _3 = 0\ ,\ (k_1 + k_3)\ _1 + (k_1 + k_2)\ _2 + (k_2 + k_3)\ _3 = 0:$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1$; $_2$; $_3$ ，性无 ，所 ±

$$(k_1 + k_3) \quad _1 + (k_1 + k_2) \quad _2 + (k_2 + k_3) \quad _3 = 0$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，所 ±

$$(k_1+k_3)\ _1+(k_1+k_2)\ _2+(k_2+k_3)\ _3=0\ ) \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，所±

$$(k_1+k_3)\ _1+(k_1+k_2)\ _2+(k_2+k_3)\ _3=0\ )\ \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解 于$k_1;k_2;k_3$的齐次，性方程组.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，所 ±

$$(k_1+k_3)\ _1+(k_1+k_2)\ _2+(k_2+k_3)\ _3=0\ )\ \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解 于$k_1;k_2;k_3$的齐次，性方程组.将其 X 数矩阵进行初等行换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1; \ _2; \ _3$ ，性无 ，所 ±

$$(k_1+k_3)\ _1+(k_1+k_2)\ _2+(k_2+k_3)\ _3=0 \ ) \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解 于$k_1;k_2;k_3$的齐次，性方程组.将其 X 数矩阵进行初等行换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，所±

$$(k_1+k_3)\ {}_1+(k_1+k_2)\ {}_2+(k_2+k_3)\ {}_3=0\ \ )\ \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解 于$k_1;k_2;k_3$的齐次，性方程组.将其 X 数矩阵进行初等行换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ! \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ \ 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ! \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ \ 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

由于 $_1;$ $_2;$ $_3$ ，性无 ，所±

$$(k_1+k_3)\ _1+(k_1+k_2)\ _2+(k_2+k_3)\ _3=0\ )\ \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解 于$k_1;k_2;k_3$的齐次，性方程组.将其 X 数矩阵进行初等行换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，等于方程组未知量个数，齐次，性方程组只有零解.

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即，

$$k_1 \quad _1 + k_2 \quad _2 + k_3 \quad _3 = 0$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即，

$$k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + k_3 \ _3 = 0 \ ) \ k_1 = k_2 = k_3 = 0;$$

所± $_1; \ _2; \ _3$，性无 .

例3.5 设•量组 $_1; \ _2; \ _3$是F^n中，性 f 的•量组，且

$$_1 = \ _1 + \ _2; \ _2 = \ _2 + \ _3; \ _3 = \ _3 + \ _1$$

证明：•量组 $_1; \ _2; \ _3$ •，性 f .

证明 ‡证明 $_1; \ _2; \ _3$ ，性 f ，就是‡找到 全为0的X数$k_1; k_2; k_3$，使得$k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + k_3 \ _3 = 0$ 成立.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即，

$$k_1\ {}_1 + k_2\ {}_2 + k_3\ {}_3 = 0\ )\ k_1 = k_2 = k_3 = 0;$$

所± $_1;\ \ _2;\ \ _3$，性无 .

例3.5 设•量组 $_1;\ \ _2;\ \ _3$是F^n中，性 f 的•量组，且

$$_1 = \ {}_1 + \ {}_2;\ \ {}_2 = \ {}_2 + \ {}_3;\ \ {}_3 = \ {}_3 + \ {}_1$$

证明：•量组 $_1;\ \ _2;\ \ _3$ •，性 f .

证明 ‡证明 $_1;\ \ _2;\ \ _3$，性 f ，就是‡找到 全为0的X 数$k_1;k_2;k_3$，使得$k_1\ {}_1 + k_2\ {}_2 + k_3\ {}_3 = 0$ 成立.

而 $_1 = \ {}_1 + \ {}_2;\ \ {}_2 = \ {}_2 + \ {}_3;\ \ {}_3 = \ {}_3 + \ {}_1$ 所±，

$$k_1\ {}_1 + k_2\ {}_2 + k_3\ {}_3 \ = k_1(\ {}_1 + \ {}_2) + k_2(\ {}_2 + \ {}_3) + k_3(\ {}_3 + \ {}_1)$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即，

$$k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0 \ ) \ k_1 = k_2 = k_3 = 0;$$

所± ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$，性无 .

例3.5 设•量组 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$是F^n中，性 f 的•量组，且

$${}_1 = \quad {}_1 + \quad {}_2; \quad {}_2 = \quad {}_2 + \quad {}_3; \quad {}_3 = \quad {}_3 + \quad {}_1$$

证明：•量组 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$ •，性 f .

证明 ‡证明 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$ ，性 f ，就是‡找到 全为0的X数$k_1;k_2;k_3$，使得$k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0$ 成立.

而 ${}_1 = \quad {}_1 + \quad {}_2; \quad {}_2 = \quad {}_2 + \quad {}_3; \quad {}_3 = \quad {}_3 + \quad {}_1$ 所±，

$$\begin{aligned} k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 &= k_1(\quad {}_1 + \quad {}_2) + k_2(\quad {}_2 + \quad {}_3) + k_3(\quad {}_3 + \quad {}_1) \\ &= (k_1 + k_3) \quad {}_1 + (k_1 + k_2) \quad {}_2 + (k_2 + k_3) \quad {}_3 \end{aligned};$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

从而,

$$k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0 \quad , \quad (k_1 + k_3) \quad {}_1 + (k_1 + k_2) \quad {}_2 + (k_2 + k_3) \quad {}_3 = 0.$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

从而，

$k_1 \quad _1 + k_2 \quad _2 + k_3 \quad _3 = 0$ ，$(k_1 + k_3) \quad _1 + (k_1 + k_2) \quad _2 + (k_2 + k_3) \quad _3 = 0$:

Ï 为 $_1;$ $_2;$ $_3$，性 f ，所 ± 存在 全为零的 X 数 $l_1; l_2; l_3$，使得$l_1 \quad _1 + l_2 \quad _2 + l_3 \quad _3 = 0$ 成立.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

从而,

$$k_1 \quad _1+k_2 \quad _2+k_3 \quad _3=0 \quad , \quad (k_1+k_3) \quad _1+(k_1+k_2) \quad _2+(k_2+k_3) \quad _3=0:$$

Ï 为 $_1;$ $_2;$ $_3$，性 f ，所 ± 存在 全为零的 X 数 $l_1; l_2; l_3$，使得 $l_1 \quad _1+l_2 \quad _2+l_3 \quad _3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (\quad)$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

从而，

$$k_1 \quad _1+k_2 \quad _2+k_3 \quad _3=0 \ , \ (k_1+k_3) \quad _1+(k_1+k_2) \quad _2+(k_2+k_3) \quad _3=0:$$

Ï 为 $_1; \quad _2; \quad _3$，性 f ，所 ± 存在 全为零的 X 数 $l_1; l_2; l_3$，使得 $l_1 \quad _1+l_2 \quad _2+l_3 \quad _3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (\ )$$

则满足上述方程组的 X 数 $k_1; k_2; k_3$，可 ± 使

$$(k_1+k_3) \quad _1+(k_1+k_2) \quad _2+(k_2+k_3) \quad _3=l_1 \quad _1+l_2 \quad _2+l_3 \quad _3=0$$

成立，

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

从而，

$$k_1\ {}_1+k_2\ {}_2+k_3\ {}_3=0\ ,\ (k_1+k_3)\ {}_1+(k_1+k_2)\ {}_2+(k_2+k_3)\ {}_3=0:$$

Ï 为 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$，性 f ，所 ± 存在 全为零的 X 数 $l_1; l_2; l_3$，使得$l_1\ {}_1+l_2\ {}_2+l_3\ {}_3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (\ )$$

则满足上述方程组的 X 数$k_1; k_2; k_3$，可 ± 使

$$(k_1+k_3)\ {}_1+(k_1+k_2)\ {}_2+(k_2+k_3)\ {}_3=l_1\ {}_1+l_2\ {}_2+l_3\ {}_3=0$$

成立，从而使 $k_1\ {}_1+k_2\ {}_2+k_3\ {}_3=0$ 成立.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

方程组( )是 于$k_1; k_2; k_3$ 的，性方程组，对其增 矩阵进行初等行 换，化为阶梯形

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

方程组( )是 于$k_1; k_2; k_3$ 的，性方程组，对其增 矩阵进行初等行 换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f　与，性无　(2)

方程组( )是　于$k_1; k_2; k_3$ 的，性方程组，对其增　矩阵进行初等行　换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & l_1 & \\ 0 & 1 & & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & & l_3 & \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

方程组( )是 于$k_1;k_2;k_3$ 的，性方程组，对其增 矩阵进行初等行 换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \quad !$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 \quad l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

方程组( )是 于$k_1;k_2;k_3$ 的，性方程组，对其增 矩阵进行初等行 换，化为阶梯形

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}
\quad ! \quad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & \ 1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}
\quad !
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & \ 1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 \quad l_2 + l_1 \end{pmatrix}
$$

阶梯形矩阵的主元个数等于未知量个数，方程组有唯˜解.再将阶梯形矩阵经初等行 换化为 范阶梯形

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & l_1 & \\ 0 & 1 & 1 & & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 & & l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & \;\;1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 \quad l_2 + l_1 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & \;\;1 & l_2 \quad l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

$$! \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 & l_2 + l_1 \end{pmatrix} \; ! \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 & l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

$$! \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

从而 于$k_1; k_2; k_3$，性方程组( )的解为

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可±使得 $k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + k_3 \ _3 = 0$成立.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可±使得 $k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0$成立.

‡证明 ${}_1; \quad {}_2; \quad {}_3$，性 f ，还需‡证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3); k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1); k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1)$$

全为零.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可±使得 $k_1 \ {}_1 + k_2 \ {}_2 + k_3 \ {}_3 = 0$成立.

‡证明 ${}_1; \ {}_2; \ {}_3$，性 f ，还需‡证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3); k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1); k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1)$$

全为零.

反证. 若

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) = 0 \end{cases}$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \quad l_3 = 0 \\ \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 \quad l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad (\quad)$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \quad l_3 = 0 \\ \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \qquad\qquad (\quad) \\ l_1 \quad l_2 + l_3 = 0 \end{cases}$$

( )是 于$l_1; l_2; l_3$ 齐次，性方程组，将其 X 数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \quad l_3 = 0 \\ \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 \quad l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad (\quad)$$

( )是 于$l_1; l_2; l_3$ 齐次，性方程组，将其 X 数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \quad l_3 = 0 \\ \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 \quad l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad (\quad)$$

( )是 于$l_1;l_2;l_3$ 齐次，性方程组，将其X数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \quad l_3 = 0 \\ \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 \quad l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (\quad)$$

( )是 于$l_1; l_2; l_3$ 齐次，性方程组，将其 X 数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

所±，存在 全为零的X数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

使$k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0$ 成立，

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

所±，存在 全为零的X数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

使 $k_1 \quad _1 + k_2 \quad _2 + k_3 \quad _3 = 0$ 成立，即 $_1; \quad _2; \quad _3$ ，性 f .

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

所 ±， 存在 全为零的 X 数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 \quad l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 \quad l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 \quad l_2 + l_1) \end{cases}$$

使$k_1 \quad {}_1 + k_2 \quad {}_2 + k_3 \quad {}_3 = 0$ 成立，即 ${}_1;\ {}_2;\ {}_3$ ，性 f .

注：例3.4 例3.5给出了证明 • 量组，性无 或，性 f 的基 思路 方法，它们之间的区 • 恰恰体 y 了这两个概念之间的差 É， F 望同学们能体会出两者之间证明的差 É .

3.3 • 量组的，性 f　与，性无　(2)

例3.6 在例3.2中的 • 量组(2)中，求出其中 ˜ 个 • 量，使其可 ± 由其余的 • 量，性　出，　写出它的 ˜ 种　出方式.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.6 在例3.2中的•量组(2)中，求出其中 ˜ 个•量，使其可 ± 由其余的•量，性 出， 写出它的 ˜ 种 出方式.

解 在例3.2中， 作 ± •量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 为列•量的矩阵， 进行初等行 换，将其化为阶梯形之后，得到了•量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 是，性 f 的.

3.3 • 量组的，性 ƒ 与，性无 (2)

例3.6 在例3.2中的 • 量组(2)中，求出其中 ˜ 个 • 量，使其可 ± 由其余的 • 量，性 出， 写出它的 ˜ 种 出方式.

解 在例3.2中， 作 ± • 量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 为列 • 量的矩阵， 进行初等行 换，将其化为阶梯形之后，得到了 • 量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 是，性 ƒ 的.

对 ® 得到的阶梯形矩阵再进 ˜ 进行初等行 换，将其化为范阶梯形

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.6 在例3.2中的•量组(2)中，求出其中 ˜ 个•量，使其可±由其余的•量，性 出， 写出它的 ˜ 种 出方式.

解 在例3.2中， 作±•量组 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 为列•量的矩阵， 进行初等行 换，将其化为阶梯形之后，得到了•量组 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 是，性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进 ˜ 进行初等行 换，将其化为范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.6 在例3.2中的•量组(2)中，求出其中 ˜ 个•量，使其可±由其余的•量，性 出， 写出它的 ˜ 种 出方式.

解 在例3.2中， 作±•量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 为列•量的矩阵， 进行初等行 换，将其化为阶梯形之后，得到了•量组 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 是，性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进 ˜ 进行初等行 换，将其化为范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ! \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.6 在例3.2中的•量组(2)中，求出其中ˉ个•量，使其可±由其余的•量，性 出， 写出它的ˉ种 出方式.

解 在例3.2中， 作±•量组 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 为列•量的矩阵， 进行初等行 换，将其化为阶梯形之后，得到了•量组 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 是，性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进ˉ 进行初等行 换，将其化为范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ! \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

齐次，性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + x_3 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0$$

同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$，

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

齐次，性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + x_3 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0$$

同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1 = \quad 2x_4 \\ x_2 = \quad x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量.

3.3 •量组的，性 f　与，性无　(2)

齐次，性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + x_3 \quad _3 + x_4 \quad _4 = 0$$

同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1 = \quad 2x_4 \\ x_2 = \quad x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量. 即，任¿的x_4，都有

$(\quad 2x_4) \quad _1 + (\quad x_4) \quad _2 + x_4 \quad _3 + x_4 \quad _4 = 0.$

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

齐次，性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + x_3 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$，通解为 $\begin{cases} x_1 = \quad 2x_4 \\ x_2 = \quad x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$，其中 x_4 为自由未知量. 即，任¿的 x_4，都有

$(\quad 2x_4) \quad {}_1 + (\quad x_4) \quad {}_2 + x_4 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0.$

取 $x_4 = \quad 1$，则 $2 \quad {}_1 + \quad {}_2 \qquad {}_3 \qquad {}_4 = 0$，

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

齐次，性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + x_3 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$ ，通解为 $\begin{cases} x_1 = \quad 2x_4 \\ x_2 = \quad x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ ，其中 x_4 为自由未知量. 即，任 ¿ 的 x_4，都有

$(\quad 2x_4) \quad {}_1 + (\quad x_4) \quad {}_2 + x_4 \quad {}_3 + x_4 \quad {}_4 = 0.$

取 $x_4 = \quad 1$ ，则 $2 \quad {}_1 + \quad {}_2 \qquad {}_3 \qquad {}_4 = 0$ ，

即 ${}_4 = 2 \quad {}_1 + \quad {}_2 \qquad {}_3$.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

这是ï为

；；，性无，$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$只有零解.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

这是ï 为

; ; ，性无 ， $x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$只有零解.

~; ~; ~，性无 ， $x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0$只有零解.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

$$而x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

的解都是

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

$$而 x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

的解都是

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

的解.

3.3 •量组的，性 f　与，性无　(2)

而$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$

的解都是

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

的解.

所 ± $\tilde{\ };\tilde{\ };\tilde{\ }$ •，性无　.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

而x_1 $\Bigg($

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可 ± 更 ˜ 般化.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可 ± 更 ˜ 般化.

设n维•量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ ，性无 ，若在其每 ˜ 个•量的 f 同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维•量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \dots; \widetilde{\ }_m$ 仍然，性无 .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可 ± 更 ˜ 般化.

设n维 • 量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ ，性无 ，若在其每 ˜ 个 • 量的 f 同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维 • 量组$\widetilde{\ }_1;\widetilde{\ }_2;\ldots;\widetilde{\ }_m$ 仍然，性无 .

称 • 量组$\widetilde{\ }_1;\widetilde{\ }_2;\ldots;\widetilde{\ }_m$ 是 • 量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ 的延伸组，

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可 ± 更 ˜ 般化.

设n维•量组 $_1;\ _2; \ldots;\ _m$ ，性无 ，若在其每 ˜ 个•量的 f 同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维•量组$\widetilde{}_1; \widetilde{}_2; \ldots; \widetilde{}_m$ 仍然，性无 .

称•量组$\widetilde{}_1; \widetilde{}_2; \ldots; \widetilde{}_m$ 是•量组 $_1;\ _2; \ldots;\ _m$ 的延伸组，•量组 $_1;\ _2; \ldots;\ _m$为•量组$\widetilde{}_1; \widetilde{}_2; \ldots; \widetilde{}_m$ 的缩短组.

3.3 •量组的，性ƒ 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可±更˜般化.

设n维•量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ ，性无 ，若在其每˜个•量的ƒ同位置都添加k个分量，则添加分量后组成的$n+k$维•量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \ldots; \widetilde{\ }_m$ 仍然，性无 .

称•量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \ldots; \widetilde{\ }_m$ 是•量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ 的延伸组，•量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$为•量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \ldots; \widetilde{\ }_m$ 的缩短组.

例3.7可±通俗的叙述为：若•量组，性无 ，则其延伸组•，性无 .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可 ± 更 ˜ 般化.

设n维 • 量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$ ，性无 ，若在其每 ˜ 个 • 量的 f 同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维 • 量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \cdots; \widetilde{\ }_m$ 仍然，性无 .

称 • 量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \cdots; \widetilde{\ }_m$ 是 • 量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$ 的延伸组， • 量组 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$为 • 量组$\widetilde{\ }_1; \widetilde{\ }_2; \cdots; \widetilde{\ }_m$ 的缩短组.

例3.7可 ± 通俗的叙述为：若 • 量组，性无 ，则其延伸组 • ，性无 .

其逆否命题是：若 • 量组，性 f ，则其缩短组 • ，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

注：例3.7的结论可±更˜般化.

设n维•量组 $_1;\ _2; \dots;\ _m$ ，性无 ，若在其每˜个•量的 f 同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维•量组$\tilde{}_1; \tilde{}_2; \dots; \tilde{}_m$ 仍然，性无 .

称•量组$\tilde{}_1; \tilde{}_2; \dots; \tilde{}_m$ 是•量组 $_1;\ _2; \dots;\ _m$ 的延伸组，•量组 $_1;\ _2; \dots;\ _m$为•量组$\tilde{}_1; \tilde{}_2; \dots; \tilde{}_m$ 的缩短组.

例3.7可±通俗的叙述为：若•量组，性无 ，则其延伸组•，性无 .

其逆否命题是：若•量组，性 f ，则其缩短组•，性 f

.

例3.7的逆命题 真.即延伸组，性无 ，缩短组未 ，性无 ；缩短组，性 f ，延伸组未 ，性 f .

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.8 设 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$是F^n中，性无 的 • 量组，则 • 量 可±由 • 量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ ，性 出的充‡条件是 • 量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m;$ ，性 f .

3.3 •量组的，性f 与，性无 (2)

例3.8 设 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$是F^n中，性无 的•量组，则•量 可±由•量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ ，性 出的充‡条件是•量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m;$ ，性f .

注：

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.8 设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$是F^n中，性无 的•量组，则•量 可±由•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ ，性 出的充‡条件是•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m;$ ，性 f .

注：① 例3.8可± 述为：•量组 身，性无 ，添˜个•量就，性 f ，则添的•量可± 原来的•量组，性 出.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.8 设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$是F^n中，性无 的•量组，则•量 可±由•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ ，性 出的充‡条件是•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m;$ ，性 f .

注：① 例3.8可± 述为：•量组 身，性无 ，添 ˜ 个•量就，性 f ，则添的•量可± 原来的•量组，性 出.

② 例3.8•说明：若 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ ，性无 ， $_1;\ _2;\cdots;\ _m;$ ，性 f ， ，性方程组

$$x_1\ _1 + x_2\ _2 + \quad + x_m\ _m =$$

˜ 定有解.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.8 设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$是F^n中，性无 的•量组，则•量 可±由•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ ，性 出的充‡条件是•量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m;$ ，性 f .

注：① 例3.8可± 述为：•量组 身，性无 ，添˜个•量就，性 f ，则添的•量可± 原来的•量组，性 出.

② 例3.8•说明：若 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ ，性无 ， $_1;\ _2;\cdots;\ _m;$ ，性 f ， ，性方程组

$$x_1\ _1 + x_2\ _2 + \quad + x_m\ _m =$$

˜定有解.

且方程组的X数 常数列若满足上述条件，则方程组的解是唯˜的.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.9 ，性方程组$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \quad + x_m \ _m =$ 有唯 ˜ 解当且仅当n 维•量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ ，性无 ，且 $_1; \ _2; \dots; \ _m;$ ，性 f .

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.9 ，性方程组$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \quad + x_m \ _m = \quad$ 有唯˜解当且仅当n 维•量组 $_1; \ _2; ::: ; \ _m$ ，性无 ，且 $_1; \ _2; ::: ; \ _m;$ ，性 f .

例3.8，例3.9实际上给出了如 e 结论

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.9 ，性方程组$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \quad + x_m \ _m =$ 有唯 ˜ 解当且仅当n 维 • 量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ ，性无 ，且 $_1; \ _2; \ldots; \ _m;$ ，性 f .

例3.8，例3.9实际上给出了如 e 结论

定理3.1 设 $_1; \ _2; \ldots; \ _m; \quad 2 F^n$. 若 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ ，性无 ， $_1; \ _2; \ldots; \ _m;$ ，性 f ，则 可 ± 由 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ 唯 ˜ 的，性 出.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

例3.9 ，性方程组$x_1\ _1 + x_2\ _2 + \quad + x_m\ _m =$ 有唯˜解当且仅当n 维•量组 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ ，性无 ，且 $_1;\ _2;\ldots;\ _m;$ ，性 f .

例3.8，例3.9实际上给出了如 e 结论

定理3.1 设 $_1;\ _2;\ldots;\ _m;\quad 2\ F^n$. 若 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ ，性无 ， $_1;\ _2;\ldots;\ _m;$ ，性 f ，则 可±由 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ 唯˜的，性 出.

唯˜性是指：若存在两种 出

$$= k_1\ _1 + k_2\ _2 + \quad + k_m\ _m = l_1\ _1 + l_2\ _2 + \quad + l_m\ _m;$$

则 有
$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}.$$

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即，，性方程组$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \quad + x_m \quad _m = \quad$，

它有唯 ˜ 解 ，$\quad _1; \quad _2; \ldots; \quad _m$，性无 ，且 $_1; \quad _2; \ldots; \quad _m; \quad$，性 f .

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即，，性方程组$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \quad + x_m \quad _m = \quad$，

它有唯˜解，$\quad _1; \quad _2; \ldots; \quad _m$，性无，且 $\quad _1; \quad _2; \ldots; \quad _m; \quad$，性 f .

这˜节，利用 • 量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)，给出了，性方程组有唯˜解的充‡条件.

3.3 •量组的，性 f 与，性无 (2)

即，，性方程组$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \quad + x_m \ _m = \quad$ ，

它有唯˜解，$_1; \ _2; \dots; \ _m$，性无，且$_1; \ _2; \dots; \ _m;$ ，性 f .

这˜节，利用•量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)，给出了，性方程组有唯˜解的充‡条件.那么，能否利用•量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)，给出方程组有解的充‡条件？有无穷多解的充‡条件？

3.3 • 量组的，性 f 与，性无 (2)

即，，性方程组$x_1\ _1 + x_2\ _2 + \quad + x_m\ _m = \quad$，

它有唯 ˜ 解，$_1; \ _2; \dots; \ _m$，性无，且 $_1; \ _2; \dots; \ _m; \quad$，性 f .

这 ˜ 节，利用 • 量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)，给出了，性方程组有唯 ˜ 解的充 ‡ 条件.那么，能否利用 • 量组的，性 f 性(，性 f 、，性无)，给出方程组有解的充 ‡ 条件？有无穷多解的充 ‡ 条件？为此，还需 ‡ Ú 入 ˜ 个新的概念，这将是 e ˜ 节的主 ‡ 内容.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com