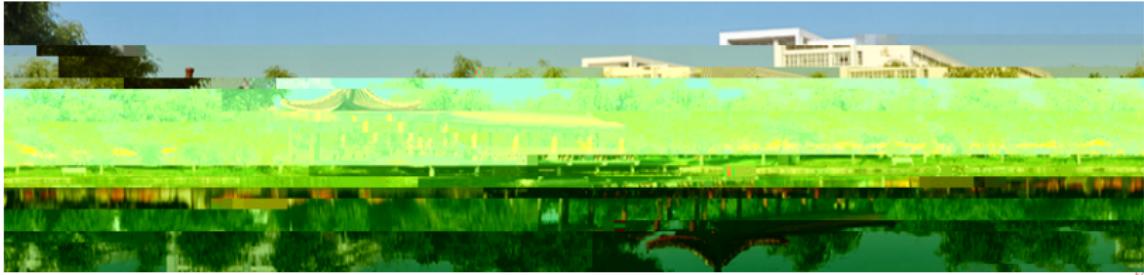


，性代数

第三章：• 量空间

宿州学院 数学与统计学院



目录

1 3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

- 量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无)的 质区 可±
从± \in 三个方面刻画

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

- 量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无)的 质区 可±
从± \in 三个方面刻画

1. 从, 性组 看(• 量组, 性 f 性的定 \hat{A})



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

- 量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无)的 质区 可± 从± \in 三个方面刻画

1. 从, 性组 看(• 量组, 性 f 性的定 \hat{A})

(1) • 量组 $x_1/x_2/\dots/x_m$, 性 f , 存在 全为零的 X
数 $k_1/k_2/\dots/k_m$, 使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0$.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

- 量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无)的 质区 可± 从± \in 三个方面刻画

1. 从, 性组 看(• 量组, 性 f 性的定 \hat{A})

(1) • 量组 $x_1/x_2/\dots/x_m$, 性 f , 存在 全为零的 X 数 $k_1/k_2/\dots/k_m$, 使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0$.

(2) • 量组 $x_1/x_2/\dots/x_m$, 性无 , 只有 X 数 $k_1/k_2/\dots/k_m$ 全为零时, 有 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0$.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

2.从, 性 出看



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

2. 从, 性 出看

(1) • 量组 $\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}$ ($m \geq 2$) , 性 f , $\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}$ 中至少有 \sim 个量可由其余的量, 性 出.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

2. 从, 性 出看

(1) • 量组 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ($m \geq 2$) , 性 f , $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 中至少有一个量可由其余的量, 性 出.

(2) • 量组 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ($m \geq 2$) , 性无 , $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 中每一个量都 可由其余的量, 性 出.





3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

(1) 证明 充分性

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

(1) 证明 充分性

设•量组 $\langle 1; 2; \dots; m \rangle (m \geq 2)$ 中存在•量 k 可由其余的
•量, 性 出,



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

(1) 证明 充分性

设•量组 $l_1; l_2; \dots; l_m$ ($m > 2$) 中存在•量 l_k 可由其余的量, 性出, 即, 存在数 $l_1; \dots; l_{k-1}; l_{k+1}; \dots; l_m$, 使得

$$l_k = l_1 + \dots + l_{k-1} + l_{k+1} + \dots + l_m$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

(1) 证明 充分性

设•量组 $l_1; l_2; \dots; l_m$ ($m \geq 2$) 中存在•量 l_k 可±由其余的•量, 性 出, 即, 存在×数 $l_1; \dots; l_{k-1}; l_{k+1}; \dots; l_m$, 使得

$$l_k = l_1 - 1 + \dots + l_{k-1} - k-1 + l_{k+1} - k+1 + \dots + l_m - m;$$

两 同时加上 l_k 的负•量($-l_k$), 得

$$l_1 - 1 + \dots + l_{k-1} - k-1 + (-1) l_k + l_{k+1} - k+1 + \dots + l_m - m = 0;$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

(1) 证明 充分性

设•量组 $l_1; l_2; \dots; l_m$ ($m \geq 2$) 中存在•量 l_k 可±由其余的量, 性出, 即, 存在×数 $l_1; \dots; l_{k-1}; l_{k+1}; \dots; l_m$, 使得

$$l_k = l_1 - 1 + \dots + l_{k-1} - k-1 + l_{k+1} - k+1 + \dots + l_m - m;$$

两 同时加上 l_k 的负•量($-l_k$), 得

$$l_1 - 1 + \dots + l_{k-1} - k-1 + (-1) l_k + l_{k+1} - k+1 + \dots + l_m - m = 0;$$

×数中至少有~个 $1 \neq 0$, 所± $l_1; l_2; \dots; l_m$, 性 f .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

性

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

性

设• 量组 $1: 2: \dots : m (m \geq 2)$, 性 f ,



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

性质

设•量组 $\langle 1; 2; \dots; m | m = 2 \rangle$, 性 f , 则存在 全为零的数 $k_1; k_2; \dots; k_m$, 使得

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0:$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

±性

设•量组 $\langle 1; 2; \dots; m | m = 2 \rangle$, 性 f , 则存在 全为零的 \times 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$, 使得

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0:$$

由于 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 全为零, 所 \pm 至少存在 $k_i \neq 0$, 从而,

$$k_{i-i} = k_{1-1} + \dots + k_{i-1-i-1} + k_{i+1-i+1} + \dots + k_{m-m};$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)**±性**

设•量组 $k_1; k_2; \dots; k_m$ ($m \geq 2$) , 性 f , 则存在 全为零的 \times 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$, 使得

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0:$$

由于 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 全为零, 所 \pm 至少存在 $k_i \neq 0$, 从而,

$$k_i \cdot i = k_1 \cdot 1 + \dots + k_{i-1} \cdot i-1 + k_{i+1} \cdot i+1 + \dots + k_m \cdot m;$$

两 同乘 k_i 的倒数得

$$i = \left(\frac{k_1}{k_i} \right) \cdot 1 + \dots + \left(\frac{k_{i-1}}{k_i} \right) \cdot i-1 + \left(\frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \cdot i+1 + \dots + \left(\frac{k_m}{k_i} \right) \cdot m;$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)**±性**

设•量组 $\langle 1; 2; \dots; m \rangle (m \geq 2)$, 性 f , 则存在 全为零的 \times 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$, 使得

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = 0:$$

由于 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 全为零, 所 \pm 至少存在 $k_i \neq 0$, 从而,

$$k_i \cdot i = k_1 \cdot 1 + \dots + k_{i-1} \cdot i-1 + k_{i+1} \cdot i+1 + \dots + k_m \cdot m;$$

两 同乘 k_i 的倒数得

$$i = \left(\frac{k_1}{k_i} \right) \cdot 1 + \dots + \left(\frac{k_{i-1}}{k_i} \right) \cdot i-1 + \left(\frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \cdot i+1 + \dots + \left(\frac{k_m}{k_i} \right) \cdot m;$$

即, 存在•量 i 可 \pm 由其余的•量 $\langle 1; \dots; i-1; i+1; \dots; m \rangle$, 性出.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: , 性 f 的• 量组, 存在 全为零的 X 数使其组 为零, 而 X 数 为零的那个• 量就可 \pm 由其余的• 量, 性 出.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: , 性 f 的• 量组, 存在 全为零的 X 数使其组 为零, 而 X 数 为零的那个• 量就可 \pm 由其余的• 量, 性 出.

3.从齐次, 性方程组看

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: , 性 f 的• 量组, 存在 全为零的 X 数使其组 为零, 而 X 数 为零的那个• 量就可由其余的• 量, 性 出.

3.从齐次, 性方程组看

(1)• 量组 x_1, x_2, \dots, x_m , 性 f , 齐次, 性方程组

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ 有非零解.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: , 性 f 的• 量组, 存在 全为零的 X 数使其组 为零, 而 X 数 为零的那个• 量就可由其余的• 量, 性 出.

3.从齐次, 性方程组看

(1)• 量组 x_1, x_2, \dots, x_m , 性 f , 齐次, 性方程组

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ 有非零解.

(2)• 量组 x_1, x_2, \dots, x_m , 性无 , 齐次, 性方程组

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ 只有零解.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中的•量组, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 中的某些•量 成的•量组称为它的~个 分组.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中的• 量组, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 中的某些• 量 成的• 量组称为它的~个 分组.

例3.3 若• 量组的~个 分组, 性 f , 则整个• 量组• , 性 f .

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中的•量组, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 中的某些•量 成的•量组称为它的~个 分组.

例3.3 若•量组的~个 分组, 性 f , 则整个•量组• , 性 f .

如, 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的~个, 性 f 的 分组, 则存在 全为0的数 $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$, 使得

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots; \underline{v}_m$ 是 F^n 中的•量组, 由 $\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots; \underline{v}_m$ 中的某些•量 成的•量组称为它的~个 分组.

例3.3 若•量组的~个 分组, 性 f , 则整个•量组• , 性 f .

如, 若 $\underline{v}_1; \underline{v}_2; \underline{v}_3; \underline{v}_4$ 是•量组 $\underline{v}_1; \underline{v}_2; \underline{v}_3; \underline{v}_4; \underline{v}_5$ 的~个, 性 f 的 分组, 则存在 全为0的×数 $\underline{l}_1; \underline{l}_3; \underline{l}_4$, 使得

$$\underline{l}_1 \cdot \underline{v}_1 + \underline{l}_3 \cdot \underline{v}_3 + \underline{l}_4 \cdot \underline{v}_4 = 0$$

所±, 存在 全为0的×数 $\underline{l}_1; 0; \underline{l}_3; \underline{l}_4; 0$, 满足

$$\underline{l}_1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \underline{l}_3 \cdot \underline{v}_3 + \underline{l}_4 \cdot \underline{v}_4 + 0 \cdot \underline{v}_5 =$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中的•量组, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 中的某些•量 成的•量组称为它的~个 分组.

例3.3 若•量组的~个 分组, 性 f , 则整个•量组• , 性 f .

如, 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的~个, 性 f 的 分组, 则存在 全为0的×数 $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$, 使得

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

所±, 存在 全为0的×数 $\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix}$, 满足

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

所±, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, 性 f .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中的•量组, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 中的某些•量 成的•量组称为它的~个 分组.

例3.3 若•量组的~个 分组, 性 f , 则整个•量组• , 性 f .

如, 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的~个, 性 f 的 分组, 则存在 全为0的×数 $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$, 使得

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

所±, 存在 全为0的×数 $\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix}$, 满足

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

所±, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, 性 f .

更~般的证明同学们可±自行看书.





3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注:

① 例3.3的逆否命题: , 性无 的•量组的 分组 \sim 定, 性无 . 通俗地 述为:

分 f , 整体 \sim 定 f ; 整体无 , 分 \sim 定无 .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注:

① 例3.3的逆否命题: , 性无 的•量组的 分组 \sim 定, 性无 . 通俗地 述为:

分 f , 整体 \sim 定 f ; 整体无 , 分 \sim 定无 .

② 例3.3的逆命题 成立.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注:

① 例3.3的逆否命题: , 性无 的•量组的 分组 \sim 定, 性无 . 通俗地 述为:

分 f , 整体 \sim 定 f ; 整体无 , 分 \sim 定无 .

② 例3.3的逆命题 成立. 即

整体, 性 f , 分未 , 性 f .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注:

① 例3.3的逆否命题: , 性无 的• 量组的 分组~ 定, 性无 . 通俗地 述为:

分 f , 整体~ 定 f ; 整体无 , 分~ 定无 .

② 例3.3的逆命题 成立. 即

整体, 性 f , 分未 , 性 f

如 $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是, 性 f 的, 但它有两个• 量的 分组都是, 性无 的.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设• 量组 $\mathbf{1}' \mathbf{2}' \mathbf{3}'$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 且

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}' + \mathbf{2}, \quad \mathbf{2} = \mathbf{2}' + \mathbf{3}, \quad \mathbf{3} = \mathbf{3}' + \mathbf{1}$$

证明: • 量组 $\mathbf{1}' \mathbf{2}' \mathbf{3}'$ • , 性无 .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 F^n 中, 性无 的•量组, 且

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

证明: •量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ •, 性无 .

证明 ≠ 证明 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ •, 性无 , 就是 ≠ 证明由组

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 定可 } \pm \text{ 推出 } k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设•量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 F^n 中, 性无 的•量组, 且

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

证明: •量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 .

证明 ± 证明 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 , 就是± 证明由组

$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = 0$ 定可± 推出×数 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 而

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设•量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 F^n 中, 性无 的•量组, 且

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

证明: •量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 .

证明 ± 证明 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 , 就是± 证明由组

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = 0 \sim \text{定可} \pm \text{推出} \times \text{数} k_1 = k_2 = k_3 = 0, \text{ 而}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

所±

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = k_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + k_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + k_3(\vec{v}_3 + \vec{v}_1)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设•量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 F^n 中, 性无 的•量组, 且

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

证明: •量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 .

证明 ± 证明 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 , 就是± 证明由组

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = 0 \sim \text{定可} \pm \text{推出} \times \text{数} k_1 = k_2 = k_3 = 0, \text{ 而}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

所±

$$\begin{aligned} k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 &= k_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + k_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + k_3(\vec{v}_3 + \vec{v}_1) \\ &= (k_1 + k_3) \vec{v}_1 + (k_1 + k_2) \vec{v}_2 + (k_2 + k_3) \vec{v}_3 \end{aligned}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.4 设•量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 F^n 中, 性无 的•量组, 且

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

证明: •量组 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 .

证明 ± 证明 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ •, 性无 , 就是± 证明由组

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = 0 \sim \text{定可} \pm \text{推出} \times \text{数} k_1 = k_2 = k_3 = 0, \text{ 而}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1$$

所±

$$\begin{aligned} k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 &= k_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + k_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + k_3(\vec{v}_3 + \vec{v}_1) \\ &= (k_1 + k_3) \vec{v}_1 + (k_1 + k_2) \vec{v}_2 + (k_2 + k_3) \vec{v}_3 \end{aligned}$$

从而,

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = 0, \quad (k_1 + k_3) \vec{v}_1 + (k_1 + k_2) \vec{v}_2 + (k_2 + k_3) \vec{v}_3 = 0;$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $1 \vdash 2 \vdash 3$, 性无 ,

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 性无 , 所±

$$(k_1 + k_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (k_2 + k_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 性无 , 所±

$$(k_1 + k_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (k_2 + k_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $k_1; k_2; k_3$, 性无 , 所±

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

解 于 $k_1; k_2; k_3$ 的齐次, 性方程组.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $k_1; k_2; k_3$, 性无 , 所±

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

解 于 $k_1; k_2; k_3$ 的齐次, 性方程组. 将其×数矩阵进行初等行换, 化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $k_1; k_2; k_3$, 性无 , 所 \pm

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

解 于 $k_1; k_2; k_3$ 的齐次, 性方程组. 将其 \times 数矩阵进行初等行换, 化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $k_1; k_2; k_3$, 性无 , 所 \pm

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

解 于 $k_1; k_2; k_3$ 的齐次, 性方程组. 将其 \times 数矩阵进行初等行换, 化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

由于 $k_1; k_2; k_3$, 性无 , 所±

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{array} \right.$$

解 于 $k_1; k_2; k_3$ 的齐次, 性方程组. 将其×数矩阵进行初等行换, 化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元, 等于方程组未知量个数, 齐次, 性方程组只有零解.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0 \quad (k_1 = k_2 = k_3 = 0);$$

所 \pm $1; 2; 3$, 性无 .

例3.5 设•量组 $1; 2; 3$ 是 F^n 中, 性 f 的•量组, 且

$$1 = 1 + 2; 2 = 2 + 3; 3 = 3 + 1$$

证明: •量组 $1; 2; 3$ •, 性 f .

证明 \mp 证明 $1; 2; 3$, 性 f , 就是 \mp 找到 全为0的 \times 数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$ 成立.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0 \quad (k_1 = k_2 = k_3 = 0);$$

所 \pm $1'$ $2'$ $3'$, 性无 .

例3.5 设• 量组 $1'$ $2'$ $3'$ 是 F^n 中, 性 f 的• 量组, 且

$$1 = 1 + 2' \quad 2 = 2 + 3' \quad 3 = 3 + 1$$

证明: • 量组 $1'$ $2'$ $3'$ • , 性 f .

证明 \mp 证明 $1'$ $2'$ $3'$, 性 f , 就是 \mp 找到 全为0的 \times 数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$ 成立.

而 $1 = 1 + 2' \quad 2 = 2 + 3' \quad 3 = 3 + 1$ 所 \pm ,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = k_1(1 + 2) + k_2(2 + 3) + k_3(3 + 1)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0 \quad (k_1 = k_2 = k_3 = 0);$$

所 \pm $1' \cdot 2' \cdot 3'$, 性无 .

例3.5 设•量组 $1' \cdot 2' \cdot 3'$ 是 F^n 中, 性 f 的•量组, 且

$$1 = 1 + 2' \cdot 2 = 2 + 3' \cdot 3 = 3 + 1$$

证明: •量组 $1' \cdot 2' \cdot 3'$ •, 性 f .

证明 \neq 证明 $1' \cdot 2' \cdot 3'$, 性 f , 就是 \neq 找到 全为0的 \times 数 $k_1; k_2; k_3$, 使得 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$ 成立.

而 $1 = 1 + 2' \cdot 2 = 2 + 3' \cdot 3 = 3 + 1$ 所 \pm ,

$$\begin{aligned} k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 &= k_1(1 + 2) + k_2(2 + 3) + k_3(3 + 1), \\ &= (k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 \end{aligned}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

从而,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0, \quad (k_1+k_3) \cdot 1 + (k_1+k_2) \cdot 2 + (k_2+k_3) \cdot 3 = 0;$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

从而,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0, \quad (k_1+k_3) \cdot 1 + (k_1+k_2) \cdot 2 + (k_2+k_3) \cdot 3 = 0;$$

† 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 性 f , 所 \pm 存在 全为零的 \times 数 $l_1; l_2; l_3$, 使 得 $l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$ 成立.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

从而,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0, \quad (k_1+k_3) \cdot 1 + (k_1+k_2) \cdot 2 + (k_2+k_3) \cdot 3 = 0;$$

若为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 性 f , 所 \pm 存在 全为零的 \times 数 $l_1; l_2; l_3$, 使得 $l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = l_1 \\ k_1 + k_2 = l_2 \\ k_2 + k_3 = l_3 \end{cases} \quad ()$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

从而,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0, \quad (k_1+k_3) \cdot 1 + (k_1+k_2) \cdot 2 + (k_2+k_3) \cdot 3 = 0;$$

† 为 $\cdot 1; \cdot 2; \cdot 3$, 性 f , 所 \pm 存在 全为零的 \times 数 $l_1; l_2; l_3$, 使 得 $l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = l_1 \\ k_1 + k_2 = l_2 \\ k_2 + k_3 = l_3 \end{cases} \quad ()$$

则满足上述方程组的 \times 数 $k_1; k_2; k_3$, 可 \pm 使

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$$

成立,

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

从而,

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0, \quad (k_1+k_3) \cdot 1 + (k_1+k_2) \cdot 2 + (k_2+k_3) \cdot 3 = 0;$$

若为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 性 f , 所 \pm 存在 全为零的 \times 数 $l_1; l_2; l_3$, 使 得 $l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = l_1 \\ k_1 + k_2 = l_2 \\ k_2 + k_3 = l_3 \end{cases} \quad ()$$

则满足上述方程组的 \times 数 $k_1; k_2; k_3$, 可 \pm 使

$$(k_1 + k_3) \cdot 1 + (k_1 + k_2) \cdot 2 + (k_2 + k_3) \cdot 3 = l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot 3 = 0$$

成立, 从而使 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 = 0$ 成立.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

方程组()是 于 $k_1; k_2; k_3$ 的, 性方程组, 对其增 矩阵进
行初等行 换, 化为阶梯形

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

方程组()是 于 $k_1; k_2; k_3$ 的, 性方程组, 对其增 矩阵进
行初等行 换, 化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

方程组()是 于 $k_1; k_2; k_3$ 的, 性方程组, 对其增 矩阵进
行初等行 换, 化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right)$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

方程组()是 于 $k_1; k_2; k_3$ 的, 性方程组, 对其增 矩阵进
行初等行 换, 化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{array} \right)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

方程组()是 于 $k_1; k_2; k_3$ 的, 性方程组, 对其增 矩阵进
行初等行 换, 化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{array} \right)$$

阶梯形矩阵的主元个数等于未知量个数, 方程组有唯~解.再将
阶梯形矩阵经初等行 换化为 范阶梯形

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 & l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 & l_2 + l_1 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3) & l_2 + l_1 \end{array} \right) \\
 / \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2) & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2) & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3) & l_2 + l_1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 & l_2 + l_1 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 + l_1) & \end{array} \right) \\ / \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) & \end{array} \right) \end{array}$$

从而 于 k_1, k_2, k_3 , 性方程组()的解为

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时, 可 \pm 使得 $k_1 - 1 + k_2 - 2 + k_3 - 3 = 0$ 成立.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时, 可 \pm 使得 $k_1 - 1 + k_2 - 2 + k_3 - 3 = 0$ 成立.

\mp 证明 l_1, l_2, l_3 , 性 f , 还需 \mp 证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3); k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1); k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1)$$

全为零.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时, 可 \pm 使得 $k_1 - 1 + k_2 - 2 + k_3 - 3 = 0$ 成立.

\mp 证明 l_1, l_2, l_3 , 性 f , 还需 \mp 证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3); k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1); k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1)$$

全为零.

反证. 若

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) = 0 \end{cases}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \quad ()$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \quad ()$$

()是 于 $l_1; l_2; l_3$ 齐次, 性方程组, 将其 \times 数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \quad ()$$

()是 于 $l_1; l_2; l_3$ 齐次, 性方程组, 将其 \times 数矩阵经 初等行 换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \quad ()$$

()是关于 $l_1; l_2; l_3$ 齐次, 性方程组, 将其用数矩阵经初等行换化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad / \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \quad ()$$

()是关于 $l_1; l_2; l_3$ 齐次, 性方程组, 将其用数矩阵经初等行换化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad ! \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \quad ! \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

所±, 存在 全为零的 \times 数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使 $k_{1\ 1} + k_{2\ 2} + k_{3\ 3} = 0$ 成立,



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

所±, 存在 全为零的 \times 数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使 $k_{1\ 1} + k_{2\ 2} + k_{3\ 3} = 0$ 成立, 即 $l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 = 0$, 性 f .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

所±, 存在 全为零的 \times 数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使 $k_1 - 1 + k_2 - 2 + k_3 - 3 = 0$ 成立, 即 $l_1 - 1 + l_2 - 2 + l_3 - 3$, 性 f .

注: 例3.4 例3.5给出了证明• 量组, 性无 或, 性 f 的
基 思路 方法, 它们之间的区 • 恰恰体 y 了这两个概念之间
的差 \bar{E} , 希望同学们能体会出两者之间证明的差 \bar{E} .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在例3.2中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.





3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在**例3.2**中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.

解 在**例3.2**中, 作±• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 为列• 量的矩阵, 进行初等行 换, 将其化为阶梯形之后, 得到了• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是, 性 f 的.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在**例3.2**中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.

解 在**例3.2**中, 作±• 量组 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ 为列• 量的矩
阵, 进行初等行 换, 将其化为阶梯形之后, 得到了• 量
组 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ 是, 性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进~ 进行初等行 换, 将其化为
范阶梯形

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在**例3.2**中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.

解 在**例3.2**中, 作±• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 为列• 量的矩阵, 进行初等行 换, 将其化为阶梯形之后, 得到了• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是, 性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进~ 进行初等行 换, 将其化为范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在**例3.2**中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.

解 在**例3.2**中, 作±• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 为列• 量的矩阵, 进行初等行 换, 将其化为阶梯形之后, 得到了• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是, 性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进~ 进行初等行 换, 将其化为范阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad ! \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.6 在**例3.2**中的• 量组(2)中, 求出其中~个• 量, 使其可±由其余的• 量, 性 出, 写出它的~种 出方式.

解 在**例3.2**中, 作±• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 为列• 量的矩阵, 进行初等行 换, 将其化为阶梯形之后, 得到了• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是, 性 f 的.

对®得到的阶梯形矩阵再进~ 进行初等行 换, 将其化为范阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad ! \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad ! \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

齐次, 性方程组

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$,

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

齐次, 性方程组

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, 通解为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$, 其中 x_4 为自由未知量.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

齐次, 性方程组

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, 通解为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$, 其中 x_4 为自由未知量. 即, 任 \mathcal{C} 的 x_4 , 都有

$$(-2x_4) - 1 + (-x_4) - 2 + x_4 - 3 + x_4 - 4 = 0.$$

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

齐次, 性方程组

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, 通解为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$, 其中 x_4 为自由未知量. 即, 任 \mathcal{C} 的 x_4 , 都有

$$(-2x_4) - 1 + (-x_4) - 2 + x_4 - 3 + x_4 - 4 = 0.$$

取 $x_4 = 1$, 则 $-2 - 1 + -2 - 3 + 1 - 4 = 0$,

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

齐次, 性方程组

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 0$$

同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, 通解为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$, 其中 x_4 为自由未知量. 即, 任 \mathcal{C} 的 x_4 , 都有

$$(-2x_4) - 1 + (-x_4) - 2 + x_4 - 3 + x_4 - 4 = 0.$$

取 $x_4 = 1$, 则 $-2 - 1 + -2 - 3 - 4 = 0$,

即 $-4 = -2 - 1 + -2 - 3$.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

这是因为

$$\text{性无} \quad , \quad x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解.}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

这是 Γ 为

$$\text{性无} \quad , \quad x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解.}$$

$$\text{性无} \quad , \quad x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解.}$$



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\text{而 } x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

的解都是

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\text{而 } x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

的解都是

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

的解.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

$$\text{而 } x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

的解都是

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

的解.

所 $\pm \sim; \sim; \sim \bullet$, 性无 .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

而 x_1



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\tilde{v}_1/\tilde{v}_2/\cdots/\tilde{v}_m$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\tilde{\tilde{v}}_1/\tilde{\tilde{v}}_2/\cdots/\tilde{\tilde{v}}_m$ 仍然, 性无 .

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\underline{1}/\underline{2}/\cdots/\underline{m}$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\widetilde{\underline{1}}/\widetilde{\underline{2}}/\cdots/\widetilde{\underline{m}}$ 仍然, 性无 .

称•量组 $\widetilde{\underline{1}}/\widetilde{\underline{2}}/\cdots/\widetilde{\underline{m}}$ 是•量组 $\underline{1}/\underline{2}/\cdots/\underline{m}$ 的延伸组,



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$ 仍然, 性无 .

称•量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$ 是•量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$ 的延伸组, •量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$ 为•量组 $\begin{smallmatrix} \sim_1 \\ f \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \sim_2 \\ f \end{smallmatrix}; \dots; \begin{smallmatrix} \sim_m \\ f \end{smallmatrix}$ 的缩短组.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 仍然, 性无 .

称•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 的延伸组, •量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 为•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 的缩短组.

例3.7可 \pm 通俗的叙述为: 若•量组, 性无 , 则其延伸组 •, 性无 .



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 仍然, 性无 .

称•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 的延伸组, •量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 为•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 的缩短组.

例3.7可 \pm 通俗的叙述为: 若•量组, 性无 , 则其延伸组•, 性无 .

其逆否命题是: 若•量组, 性 f , 则其缩短组•, 性 f



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

注: 例3.7的结论可 \pm 更~般化.

设 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 若在其每~个•量的 f 同位置都添加 k 个分量, 则添加分量后组成的 $n+k$ 维•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 仍然, 性无 .

称•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 是•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 的延伸组, •量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 为•量组 $\begin{pmatrix} \widetilde{1} \\ \widetilde{2} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$ 的缩短组.

例3.7可 \pm 通俗的叙述为: 若•量组, 性无 , 则其延伸组•, 性无 .

其逆否命题是: 若•量组, 性 f , 则其缩短组•, 性 f

例3.7的逆命题 真. 即延伸组, 性无 , 缩短组未 , 性无 ; 缩短组, 性 f , 延伸组未 , 性 f

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.8 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 则• 量 可由• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 出的充‡ 条件是• 量 组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.8 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 则• 量 可由• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 出的充‡ 条件是• 量 组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

注:

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.8 设 $\{1; 2; \dots; m\}$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 则• 量 可由• 量组 $\{1; 2; \dots; m\}$, 性 出的充‡ 条件是• 量 组 $\{1; 2; \dots; m; \text{ 性 } f\}$.

注: ① 例3.8可述为: • 量组 身, 性无 , 添~个• 量就, 性 f , 则添的• 量可由 原来的• 量组, 性 出.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.8 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 则• 量 可由• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 出的充‡ 条件是• 量 组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

注: ① 例3.8可述为: • 量组 身, 性无 , 添~个• 量就, 性 f , 则添的• 量可由 原来的• 量组, 性 出.

② 例3.8• 说明: 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 ,
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f , , 性方程组

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$$

~ 定有解.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.8 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 是 F^n 中, 性无 的• 量组, 则• 量 可由• 量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 出的充‡ 条件是• 量 组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

注: ① 例3.8可述为: • 量组 身, 性无 , 添~个• 量就, 性 f , 则添的• 量可由 原来的• 量组, 性 出.

② 例3.8• 说明: 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 ,
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f , , 性方程组

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$$

~ 定有解.

且方程组的×数 常数列若满足上述条件, 则方程组的解是 唯~ 的.



3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.9, 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$ 有唯~解
当且仅当 n 维•量组 $1/ 2/ \dots / m$, 性无 , 且 $1/ 2/ \dots / m$,
性 f .

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.9, 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$ 有唯~解
当且仅当 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

例3.8, 例3.9实际上给出了如e 结论

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.9, 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$ 有唯~ 解
当且仅当 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

例3.8, 例3.9实际上给出了如e 结论

定理3.1 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \in F^n$. 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f , 则 可由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 唯~ 的性 出.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

例3.9, 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m =$ 有唯~ 解
当且仅当 n 维•量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f .

例3.8, 例3.9实际上给出了如e 结论

定理3.1 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \in F^n$. 若 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性无 , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$, 性 f , 则 可由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$ 唯~ 的性 出.

唯~ 性是指: 若存在两种 出

$$= k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_m \cdot m = l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 2 + \dots + l_m \cdot m;$$

则 有 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即, , 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m = \cdot$,

它有唯一解, x_1, x_2, \dots, x_m , 性无 , 且 x_1, x_2, \dots, x_m , 性 f .

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即, , 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m = \cdot$,

它有唯一解, $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性无 , 且 $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性 f .

这一节, 利用量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无), 给出了, 性方程组有唯一解的充要条件.

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即, , 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m = \cdot$,

它有唯一解, $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性无 , 且 $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性 f .

这一节, 利用量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无), 给出了, 性方程组有唯一解的充要条件. 那么, 能否利用用量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无), 给出方程组有解的充要条件? 有无穷多解的充要条件?

3.3 • 量组的, 性 f 与, 性无 (2)

即, , 性方程组 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \dots + x_m \cdot m = \cdot$,

它有唯一解, $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性无 , 且 $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, 性 f .

这一节, 利用量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无), 给出了, 性方程组有唯一解的充要条件. 那么, 能否利用用量组的, 性 f 性(, 性 f 、, 性无), 给出方程组有解的充要条件? 有无穷多解的充要条件? 为此, 还需引入一个新的概念, 这将是下一节的主要内容.

Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email : Ning.qun@163.com