线性代
1 章：线性 程组

宿州学院 学 统计学院

目

2.1 一般线性 程组

现 . 中 量 关系大Ñ可以 线性 程组描 .

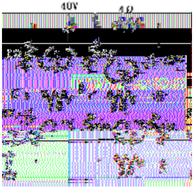
2.1 一般线性 程组

现 . 中 量 关系大 Ñ 可以 线性 程组描 .例 X，

1.(> 网 问题) > ² 过 > 阻(X 泡或 > 机) ，会产 “ > 压降”。根 â 欧姆 ½ ：$U = I \quad R$，其中U为 > 阻两 à “ > 压降”单位： 特)，I为 ² > 阻 > 强 Ý (单位：安培)，R 为 > 阻值(单位：欧姆)。在 > 网 中，？何一个合回 > 从希 霍 > 压 ½ ，即，沿某个 向环 7 回一周 所 > 压降U 代 和 沿同一 向环 7 该回 > 源 > 压 代 和。

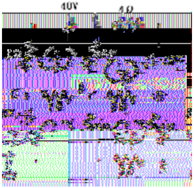
2.1 一般线性 程组

下图 带 四个回 一个 > 网 .



2.1 一般线性 程组

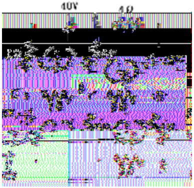
下图 带 四个回 一个 > 网 .



利 希 霍 > 压 ½ ，可 图中回 > 所 足 关系 .

2.1 一般线性 程组

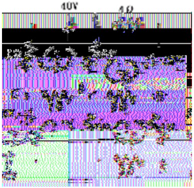
下图 带 四个回 一个 > 网 .



利 希 霍 > 压 ½ ，可 图中回 > 所 足 关系 .
在(I_1)回 中，> I_1 ² n 个 > 阻，其 > 压降为：

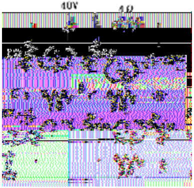
$$I_1 + 7I_1 + 4I_1 = 12I_1;$$

2.1 一般线性 程组



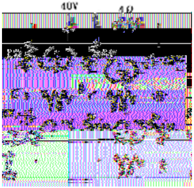
回 (I_2)中 > I_2也 ² 回 (I_1) 一 ，即从A B 支，é >压降为 $4I_2$ ；

2.1 一般线性 程组



回 (I_2)中 > I_2也 ^{2} 回 (I_1) 一 ，即从A B 支，é >压降为 $4I_2$；同样，回 (I_3)中 > I_3也 ^{2} 回 (I_1) 一 ，即从B C 支，é >压降为 $7I_3$.

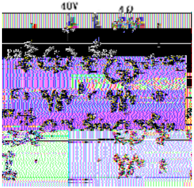
2.1 一般线性 程组



回 (I_2)中 > I_2也 ² 回 (I_1) 一 ，即从A B 支，é >压降为 $4I_2$；同样，回 (I_3)中 > I_3也 ² 回 (I_1) 一 ，即从B C 支，é >压降为 $7I_3$. 回 (I_1)中>源>压为40， 希 霍 ½ ：

$$12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 = 40;$$

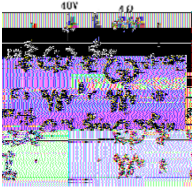
2.1 一般线性 程组



同理，

回 (I_1) 足：$12I_1$ $4I_2$ $7I_3 = 40;$

2.1 一般线性 程组

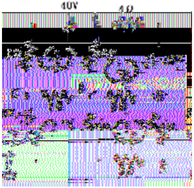


同理,

回 (I_1) 足: $12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 = 40;$

回 (I_2) 足: $\quad 4I_1 + 13I_2 \quad 5I_4 = \quad 10;$

2.1 一般线性 程组



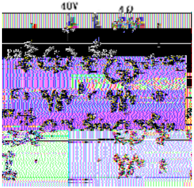
同理，

回 (I_1) 足：$12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 = 40;$

回 (I_2) 足：$\quad 4I_1 + 13I_2 \quad 5I_4 = \quad 10;$

回 (I_3) 足：$\quad 7I_1 + 15I_2 \quad 6I_4 = 30;$

2.1 一般线性　程组



同理，

回　(I_1)　足：$12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 = 40;$

回　(I_2)　足：$4I_1 + 13I_2 \quad 5I_4 = \quad 10;$

回　(I_3)　足：$7I_1 + 15I_2 \quad 6I_4 = 30;$

回　(I_4)　足：$5I_2 \quad 6I_3 + 14I_4 = 20;$

[redacted]

2.1 一般线性　程组

，回　>　所　足　关系　　：

$$\begin{cases} 12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 \qquad\quad = 40 \\ \quad 4I_1 + 13I_2 \quad 5I_4 \quad = \quad 10 \\ \quad 7I_1 + 15I_3 \quad 6I_4 \quad = 30 \\ \quad 5I_2 \quad 6I_3 + 14I_4 \quad = 20 \end{cases}$$

ò　一个含 I_1, I_2, I_3, I_4　线性　程组. e 记

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性 程组

，回 > 所 足 关系 ：

$$\begin{cases} 12I_1 \quad 4I_2 \quad 7I_3 = 40 \\ 4I_1 + 13I_2 \quad 5I_4 = \quad 10 \\ 7I_1 + 15I_3 \quad 6I_4 = 30 \\ 5I_2 \quad 6I_3 + 14I_4 = 20 \end{cases}$$

ò 一个含I_1, I_2, I_3, I_4 线性 程组. e 记

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 14 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ý阵 乘 和Ý阵 相 ，þ 程可以 Ý阵 为$AX = b$.

2.1 一般线性 程组

Ý 阵A 1 i行j 元素a_{ij} Ò 程组中 1 i个 程中 1 j个未知量I_j 系 ，称为 程组 系 Ý 阵.

2.1 一般线性 程组

Ý 阵A 1 i行j 元素a_{ij} Ò 程组中 1 i个 程中 1 j个 未知量I_j 系 ，称为 程组 系 Ý 阵.

X为未知量 ；b 常 项构成 常 .

2.1 一般线性 程组

Ý 阵A 1 i行j 元素a_{ij} Ò 程组中 1 i个 程中 1 j个 未知量I_j 系 ，称为 程组 系 Ý 阵.

X为未知量 ；b 常 项构成 常 .

2.(诺 ² 济学奖 学模型)

2.1 一般线性 程组

Ý 阵A 1 i行j 元素a_{ij} Ò 程组中 1 i个 程中 1 j个未知量I_j 系 ，称为 程组 系 Ý 阵.

X为未知量 ；b 常 项构成 常 .

2.(诺 ² 济学奖 学模型)华西里 · 里昂惕 (Wassily Leontief) 1930年移 ø 美国 原苏联籍 ² 济学家，因其 展论投 \ 产出 析 在 ² 济 产 重大作 ， 服 1973年诺 ² 济学奖.投 \ 产出模型 基 思想 ：假 一个国家 ² 济 为很 õ 行业(X 制造业、 通讯业、 乐业和 务行业)，我们把一个 门产出 总货 价值称为该产出 价格(price). e 知 每个 门一年 总产出， 准 (论) 其产出 X 何在 ² 济 其它 门之间 配或" 易".华西里 · 里昂惕 证明论 X 下 (：存在赋给各 门总产出 平衡价格， 每个 门 投 \ 产出 Ñ 相 .

2.1 一般线性　程组

假　一个 ² 济系统　n 个行业：五 7 化工、能源、机械

2.1 一般线性 程组

将五 7 化工、能源、机械行业每年总产出 价格 p_1, p_2, p_3 . 1 每个行业 产出 配 何处，行 每个行业所需 投 \ .

2.1 一般线性　程组

将五 7 化工、能源、机械行业每年总产出　价格 p_1, p_2, p_3　　. 1　　　每个行业　产出　配　何处，行　每个行业所需　投 \ .

例 X， 1 一行说明五 7 化工行业购　论20%　　行业产出，80%　能源产出和40%　机械产出，因此五 7 化工行业　须　向 n 个行业支付 $0.2p_1$, $0.8p_2$, $0.4p_3$ 元.五 7 化工行业　总支出为 $0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$.

2.1 一般线性 程组

将五 7 化工、能源、机械行业每年总产出 价格 p_1, p_2, p_3 . 1 每个行业 产出 配 何处，行 每个行业所需 投 \ .

例 X， 1 一行说明五 7 化工行业购 论20% 行业产出，80% 能源产出和40% 机械产出，因此五 7 化工行业 须向 n 个行业支付$0.2p_1$，$0.8p_2$，$0.4p_3$元.五 7 化工行业 总支出为$0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$.

为论 五 7 化工行业 \ 它 支出，依 â 华西里 · 里昂惕 模型，ò ：

1 一行：$p_1 = 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$；

2.1 一般线性　程组

将五 7 化工、能源、机械行业每年总产出　价格
p_1, p_2, p_3　.　1　　每个行业　产出　配　何处，行
每个行业所需　投\.

例 X，1 一行说明五 7 化工行业购　论20%　　行业产出，80%　能源产出和40%　机械产出，因此五 7 化工行业　须向 n 个行业支付 $0.2p_1, 0.8p_2, 0.4p_3$ 元.五 7 化工行业　总支出为 $0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$.

为论　五 7 化工行业　　\　　它　支出，依 â 华西里 · 里昂惕　　模型，ò　:

1 一行：$p_1 = 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$；

1　行：$p_2 = 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3$；

2.1 一般线性 程组

将五 7 化工、能源、机械行业每年总产出 价格 p_1，p_2，p_3 . 1 每个行业 产出 配 何处，行 每个行业所需 投\.

例 X， 1 一行说明五 7 化工行业购 论20% 行业产出，80% 能源产出和40% 机械产出，因此五 7 化工行业 须 向 n 个行业支付$0.2p_1$，$0.8p_2$，$0.4p_3$元.五 7 化工行业 总支出为$0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$.

为论 五 7 化工行业 \ 它 支出，依 â 华西里 · 里昂惕 模型，ò ：

1 一行：$p_1 = 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3$；

1 行：$p_2 = 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3$；

1 n 行：$p_3 = 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3$；

2.1 一般线性 程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

2.1 一般线性　程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这　关　未知 p_1, p_2, p_3 线性　程组，整理

$$\begin{cases} 0.8p_1 \quad 0.8p_2 \quad 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 \quad 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 \quad 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

2.1 一般线性 程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 = 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 = 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 = 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这 关 未知 p_1, p_2, p_3 线性 程组，整理

$$\begin{cases} 0.8p_1 \quad 0.8p_2 \quad 0.4p_3 = 0 \\ 0.3p_1 \quad 0.9p_2 + 0.4p_3 = 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 \quad 0.8p_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) (1) 同） 形，

2.1 一般线性 程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这 关 未知 p_1, p_2, p_3 线性 程组，整理

$$\begin{cases} 0.8p_1 \quad 0.8p_2 \quad 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 \quad 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 \quad 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) (1) 同） 形，即， (1)成立 p_1, p_2, p_3 值，Ñ能 (2)成立；且 (2)成立 p_1, p_2, p_3 值，Ñ能 (1)成立.

2.1 一般线性　程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 & = 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 & = 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 & = 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这　关　未知 p_1, p_2, p_3 线性　程组，整理

$$\begin{cases} 0.8p_1 \quad 0.8p_2 \quad 0.4p_3 = 0 \\ 0.3p_1 \quad 0.9p_2 + 0.4p_3 = 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 \quad 0.8p_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)　(1)　同）　形，即，　(1)成立 p_1, p_2, p_3　值，Ñ能　(2)成立；且　(2)成立 p_1, p_2, p_3　值，Ñ能　(1)成立.称这样　程组　同）　，也说他们　价　.

2.1 一般线性　程组

(2)　系　Ý 阵$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.9 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$，

未知量　为$X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$，常　　为$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

程组(2) Ý 阵　　：$AX = 0$.

2.1 一般线性 程组

(2) 系 Ý 阵 $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.9 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$,

未知量 为 $X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, 常 为 $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

程组(2) Ý 阵 : $AX = 0$.

一般 / ,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ n个未知量, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ $n+1$个已知 , 称

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

为关 未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$ n元线性 程.

2.1 一般线性 程组

m个关 未知量$x_1, x_2, \dots, x_n$ n元线性 程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

组成 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad\quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad\quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad\quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

称为n个未知量，m个 程 线性 程组.

2.1 一般线性 程组

m个关 未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$ n元线性 程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

组成 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

称为n个未知量，m个 程 线性 程组. a_{ij} 1 i个 程中x_j 系 .

2.1 一般线性 程组

特 ， e 常 $b_1 = b_2 = \quad = b_m = 0$，即， 程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

2.1 一般线性 程组

特 ， e 常 $b_1 = b_2 = \quad = b_m = 0$，即， 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

称为关 未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 齐次线性 程组.

e 未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 一组 值 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 可以 (3)中

每一个 程 Ñ 成立，即

$$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

2.1 一般线性 程组

则称 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 为线性 程组(3) 一个）.

2.1 一般线性　程组

$$\text{则称}\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$ 为线性　程组(3)　一个）.

Ý阵　相　， $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ ， $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

2.1 一般线性 程组

则称 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 为线性 程组(3) 一个).

Ý 阵 相 , $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 线性 程组(3) 一个) , 称 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 为线性 程组(3) 一个)向量.

2.1 一般线性 程组

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ —½ 齐次线性 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

一个），称为(4) 一个平 ），也称为 ）.

2.1 一般线性 程组

e 存在 为0 $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 齐次线

性 程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

一个），称其为(4) 一个 平 ），也称 ）.

2.1 一般线性　程组

问题　：

一般　线性　程组(3)在　么情况下　)？　么情况下无　)？ 在　)　，　õ　)？　止一个)　，)　一般形　或 (构会　　么样子？

2.1 一般线性　程组

问题　：

一般　线性　程组(3)在　么情况下　）？　么情况下无）？ 在　），　õ　）？　止一个）　，）　一般形　或（构会　　么样子？

齐次线性　程组(4)在　么情况下存在　平　（　　））？）（构　　　么样子？

2.1 一般线性　程组

问题　：

一般　线性　程组(3)在　么情况下　）？　么情况下无　）？ 在　）　，　õ　）？　止一个）　，）　一般形　或（ 构会　　么样子？

齐次线性　程组(4)在　么情况下存在　平　（　　））？ ）（ 构　　　么样子？

为论）û 这些问题，除Ý阵以及Ý阵　初　　换　工ä外，我们还需要　组向量　　学工ä.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com