

线性代数

第三章：向 空间

习 题 解 答

宿州学院 数学 统计学院



目录

1 习题3.5



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、3、4列, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、3、4列, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是其极大线性无关组.

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

1.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、3、4列, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是其极大线性无关组.

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;
主元在第1、2、3列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、2、3列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其极大线性无关组.

(3)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变
, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、2、3列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其极大线性无关组.

(3)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变
 , 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、2、3列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其极大线性无关组.

(3)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变
为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、2、3列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其极大线性无关组.

(3)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变
为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(4) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A ，并对其施行初等行变换，化为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(4) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 化为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(4)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A ，并对其施行初等行变换，化为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元，所以向量组的秩为3；



习题3.5(P_{118} P_{122})

(4)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}]{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以向 组的秩为3;

主元在第1、2、4列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.

且 $\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{7}{2}\alpha_2$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

2.解 (1)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.

且 $\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{7}{2}\alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A ，并对其施行初等行变换，使 A 为阶梯形，进而使 A 为规范阶梯形.





习题3.5(P_{118} P_{122})

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形, 进而化为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \\ \text{!} \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \text{!} \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形, 进而化为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \\ \text{!} \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \text{!} \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2 个主元, 所以向量组的秩为 2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向 组的秩为2;
主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形, 进而化为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向量组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形, 进而化为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \\ \text{!} \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \text{!} \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向量组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形, 进而化为规范阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 2个主元, 所以向量组的秩为2;

主元在第1、2列, 所以 α_1, α_2 是其极大线性无关组.

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2$, $\alpha_5 = 2\alpha_1 - \alpha_2$.



习题3.5(P_{118} P_{122})

3.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

3.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变 ,
为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & t \\ 0 & t & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2 & t & t^2 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

3.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对其施行初等行变换, 化为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为2, 阶梯形矩阵中 该 2个主元,



习题3.5(P_{118} P_{122})

3.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为2, 阶梯形矩阵中 该 2个主元,

所以, $\begin{cases} t - 1 \neq 0 \\ 2 - t - t^2 = 0 \end{cases}$ 者 $\begin{cases} t - 1 = 0 \\ 2 - t - t^2 \neq 0 \end{cases},$





习题3.5(P_{118} P_{122})

4.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.



习题3.5(P_{118} P_{122})

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 36 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 36 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以矩阵的秩为3;



习题3.5(P_{118} P_{122})

4.解 (1)对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 36 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以矩阵的秩为3;

主元在第1、2、3列, 所以 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是其极大

线性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2) 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变} \atop !} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以矩阵的秩为3;



习题3.5(P_{118} P_{122})

(2)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 3个主元, 所以矩阵的秩为3;

主元在第1、2、4列, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是其极大线

性无关组.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(3)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(3) 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

初等行变

!

阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(3) 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 4个主元, 所以矩阵的秩为4;



习题3.5(P_{118} P_{122})

(3)对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中 4个主元, 所以矩阵的秩为4;

主元在第1、2、3、4列, 所以

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 是其极大线性无关组.}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda & \lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(3+\lambda) & (\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda & \lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(3+\lambda) & (\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ 时, 秩为2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda & \lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(3+\lambda) & (\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ 时, 秩为2; $\lambda = 3$ 时, 秩为2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

5.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda & \lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(3+\lambda) & (\lambda+1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ 时, 秩为2; $\lambda = 3$ 时, 秩为2; $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时, 秩为3.



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变 , 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!

阶梯形

当 $a = 1$ 时, 阶梯形中 2个主元, 秩为2;



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!

阶梯形

当 $a = 1$ 时, 阶梯形中 2个主元, 秩为2;

当 $a \neq 1$ 时, 阶梯形中 3个主元, 秩为3.



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!

阶梯形

当 $a = 1$ 时, 阶梯形中 2个主元, 秩为2;

当 $a \neq 1$ 时, 阶梯形中 3个主元, 秩为3.

7.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!

阶梯形

当 $a = 1$ 时, 阶梯形中 2个主元, 秩为2;

当 $a \neq 1$ 时, 阶梯形中 3个主元, 秩为3.

7.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其实施初等行变, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

6.解 对已知矩阵实施初等行变, 为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$

当 $a = 1$ 时, 阶梯形中 2个主元, 秩为2;

当 $a \neq 1$ 时, 阶梯形中 3个主元, 秩为3.

7.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其实施初等行变, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 4 & a & 2 & a & 2 & ab \\ 0 & 0 & 1 & c & 5b \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq 4$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq -4$ 时, $\bar{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;

(2) 当 $a = 0, a = -4$ 时, 矩阵

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \bar{A} \rightarrow \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 3b \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq -4$ 时, $\bar{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;

(2) 当 $a = 0, a = -4$ 时, 矩阵

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 3b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{!}} \text{梯形}$$

这时, 若 $1+c \neq 0, 3b \neq 0$, 则 β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq -4$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;

(2) 当 $a = 0, a = -4$ 时, 矩阵

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 3b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{!}} \text{梯形}$$

这时, 若 $1+c \neq 3b \neq 0$, 则 β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即, $a = -4$ 且 $1+c \neq 3b \neq 0$ 时, β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

8. 解



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq -4$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;

(2) 当 $a = 0, a = -4$ 时, 矩阵

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 3b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{!}} \text{梯形}$$

这时, 若 $1+c \neq 3b \neq 0$, 则 β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即, $a = -4$ 且 $1+c \neq 3b \neq 0$ 时, β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

8. 解 以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

(1) 当 $a \neq 0, a \neq -4$ 时, $\bar{A}$ 3个主元且最后一列无主元, 则 β 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一的线性表出;

(2) 当 $a = 0, a = -4$ 时, 矩阵

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 3b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{!}} \text{梯形}$$

这时, 若 $1+c \neq 3b \neq 0$, 则 β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即, $a = -4$ 且 $1+c \neq 3b \neq 0$ 时, β 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

8. 解 以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\bar{A}$, 并对其进行初等行变, 为梯形.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{matrix} \text{!} \\ \text{梯形} \end{matrix}$$





—



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 4 & 0 & 3 & 3a & a^2+2a & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 4$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 且主元在第1、2、3列, 所以第4、5、6列对 的向 可以 第1、2、3列对 的列向 线性表出(且表示唯一).

即, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出(且表出唯一).



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 4 & 0 & 3 & 3a & a^2+2a & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 4$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 且主元在第1、2、3列, 所以第4、5、6列对 的向 可以 第1、2、3列对 的列向 线性表出(且表示唯一).

即, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出(且表出唯一).

$a = 2$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 但主元出现在了第5列, 这时 α_2 不能 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出;



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 4 & 0 & 3 & 3a & a^2+2a & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 4$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 且主元在第1、2、3列, 所以第4、5、6列对 的向 可以 第1、2、3列对 的列向 线性表出(且表示唯一).

即, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出(且表出唯一).

$a = 2$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 但主元出现在了第5列, 这时 α_2 不能 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出;

$a = 4$ 时, 矩阵 $\overline{A}$ 3个主元, 但主元出现在了第5列, 这时 α_2 不能 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.



习题3.5(P_{118} P_{122})

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$ ，并对其施行初等行变换， $\overline{B}$ 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对其进行初等行变, 为阶梯形.

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & a & & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a & 1 & & 1 & a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2 & a & a^2 & 0 & 6+3a & 2+4a \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$ ，并对其进行初等行变，为阶梯形.

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & a & & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 & a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2 & a & a^2 & 0 & 6+3a & 2+4a \end{pmatrix}$$

$a=1$ 时， $\overline{B}$ 3个主元且第5、6列出现了主元，这时 β_2, β_3 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出；



习题3.5(P_{118} P_{122})

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$ ，并对其施行初等行变，为阶梯形。

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & a & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 & a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2 & a & a^2 & 0 & 6+3a & 2+4a \end{pmatrix}$$

$a = 1$ 时， $\overline{B}$ 3个主元且第5、6列出现了主元，这时 β_2, β_3 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出；

$a = -2$ 时， $\overline{B}$ 3个主元且第6列出现了主元，这时 β_3 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出；



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在
第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

综上, $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在
第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

综上, $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出,
且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

9.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

综上, $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

9.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \notin 1$ 且 $a \notin 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在
第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

综上, $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出,
且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

9.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \notin 1$ 且 $a \notin 2$ 时, $\overline{B}$ 3个主元且主元在
第1、2、3列, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

综上, $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出,
且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

9.解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a & 1 & a+1 & a & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元在第1、2、3列, 这时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(且表出唯一);



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元在第1、2、3列, 这时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(且表出唯一);

$a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且第4列 主元, 这时 β_1 不能
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元在第1、2、3列, 这时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(且表出唯一);

$a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且第4列 主元, 这时 β_1 不能
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对其进行初等行
 变, 为梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元在第1、2、3列, 这时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(且表出唯一);

$a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且第4列 主元, 这时 β_1 不能
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对其进行初等行
 变, 为阶梯形.

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 & 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

$a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元在第1、2、3列, 这时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(且表出唯一);

$a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且第4列 主元, 这时 β_1 不能
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对其进行初等行
 变, 为阶梯形.

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 & 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3}a & 1 & \frac{2}{3}a & a & 1 \end{pmatrix}$$



B 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不等价.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不等价.

10.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不等价.

10.解 以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不等价.

10.解 以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

$\overline{B}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

综上, 当 $a \neq 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价;

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不等价.

10.解 以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 $\overline{A}$, 并对其进行初等行变换, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & \frac{1}{2}a & a & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出(且表出唯一);

当 $a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且在第4列, α_1 不能 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出.

(1) 所求 a 的值为 $a = 1$.

(2) 在 $a = 1$ 时, 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对其进行初等行变换, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $a \neq 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且在第1、2、3列, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出(且表出唯一);

当 $a = 1$ 时, $\overline{A}$ 3个主元且在第4列, α_1 不能 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线
 性表出.

(1)所求 a 的值为 $a = 1$.

(2)在 $a = 1$ 时, 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列构造矩阵 $\overline{B}$, 并对
 其进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{阶梯形}}$$

$\overline{A}$ 的阶梯形知, 当 $\lambda = 1$ 者 $\lambda = -2$ 时, 方程组 解且
无穷多解.



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$

$\bar{A}$ 的阶梯形知, 当 $\lambda = 1$ 者 $\lambda = -2$ 时, 方程组 解且无穷多解.

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组无解.



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$ α_3 , $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$

$\bar{A}$ 的阶梯形知, 当 $\lambda = 1$ 者 $\lambda = -2$ 时, 方程组 解且无穷多解.

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组无解.

在 $\lambda = 1$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$ α_3 , $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$

$\bar{A}$ 的阶梯形知, 当 $\lambda = 1$ 者 $\lambda = -2$ 时, 方程组 解且无穷多解.

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组无解.

在 $\lambda = 1$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

所以, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$ α_3 , $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$.

11.解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 0 & 3 & 3 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}$$

$\bar{A}$ 的阶梯形知, 当 $\lambda = 1$ 者 $\lambda = -2$ 时, 方程组 解且无穷多解.

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组无解.

在 $\lambda = 1$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等行变}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \text{阶梯形}, \text{通解为} \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = -2$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = 2$ 时, 将 $\overline{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\begin{array}{l} \text{初等行变} \\ \overline{A} \rightarrow \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = 2$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\begin{array}{c} \text{初等行变} \\ \bar{A} \rightarrow \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{通解为} \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}.$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = 2$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\begin{array}{c} \text{初等行变} \\ \bar{A} \rightarrow \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{通解为} \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}.$$

12.解



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = 2$ 时, 将 $\overline{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\begin{array}{c} \text{初等行变} \\ \overline{A} \rightarrow \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{通解为} \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}.$$

12.解 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变 , 为阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

在 $\lambda = 2$ 时, 将 $\bar{A}$ 进一步 为规范阶梯形.

$$\begin{array}{c} \text{初等行变} \\ \bar{A} \quad ! \\ \text{规范阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{通解为} \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}.$$

12.解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变, 为阶梯形.

$$\begin{array}{c} \text{初等行变} \\ \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & \lambda & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad ! \\ \text{阶梯形} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(10 - \lambda)(1 - \lambda) & \frac{1}{2}(4 - \lambda)(1 - \lambda) \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解.



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解. 通解为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$;

当 $\lambda = 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列 主元, 方程组无解;

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列无主元, 方程组 唯一解.



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解. 通解为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$;

当 $\lambda = 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列 主元, 方程组无解;

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列无主元, 方程组 唯一解.

14. 解



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解. 通解为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$;

当 $\lambda = 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列 主元, 方程组无解;

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列无主元, 方程组 唯一解.

14.解 以 $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变换, 为梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解. 通解为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$;

当 $\lambda = 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列 主元, 方程组无解;

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列无主元, 方程组 唯一解.

14.解 以 $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{初等行变} \\ ! \\ \text{阶梯形} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_3 + c_4 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A}$ 1个主元, 且常数列无主元, 方程组 无穷多解. 通解为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$;

当 $\lambda = 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列 主元, 方程组无解;

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $\overline{A}$ 3个主元, 且常数列无主元, 方程组 唯一解.

14.解 以 $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 为列构造矩阵 A , 并对其进行初等行变, 为阶梯形.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_3 + c_4 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

初等行变 之 的矩阵知, $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_1$ 所在的列, 至多只个主元, 一定线性相关.



习题3.5(P_{118} P_{122})

15. 以 A, B, C, D, E, F 所含成分为列构造矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 4.5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 0.75 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

15. 以 A, B, C, D, E, F 所含成分为列构造矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 4.5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

(1) 对 H 进行初等行变，为阶梯形，进而为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{array}{c}
 H \\
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 \text{!} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\
 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 \text{!} \\
 \text{规范} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{array}{c}
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 H \\
 \text{!} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\
 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 \text{!} \\
 \text{规范} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

H 的阶梯形中 4个主元, 所以 H 的列向 组的极大线性无关组 含4个列向 , 其 的2个可以 这四个组合得到.



习题3.5(P_{118} P_{122})

$$\begin{array}{l}
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 H \\
 \text{!} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\
 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{初等} \\
 \text{行变} \\
 \text{!} \\
 \text{规范} \\
 \text{阶梯形}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

H 的阶梯形中 4个主元, 所以 H 的列向 组的极大线性无关组
 含4个列向 , 其 的2个可以 这四个组合得到. H 的极大无关
 组分别是: A, B, D, E ; A, C, D, E ; A, D, E, F ;
 B, C, D, E ; B, D, E, F ; C, D, E, F .



习题3.5(P_{118} P_{122})

其列均可以极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没意义.



习题3.5(P_{118} P_{122})

其列均可以极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没意义.

经计算，取 B, C, D, E ，这时

$$A = 0.5C + 0.5D + 0E + 0F; \quad F = 1.5C + 0.5D + 0E + 0F.$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

其 列均可以 极大线性无关组线性表出，但在实际问题中，表出系数为负数时没 意义.

经计算，取 B, C, D, E ，这时

$$A = 0.5C + 0.5D + 0E + 0F; \quad F = 1.5C + 0.5D + 0E + 0F.$$

所以可以 B, C, D, E 调出所 六种.



习题3.5(P_{118} P_{122})

其 H 列均可以 H 极大线性无关组线性表出, 但在实际问题中, 表出系数为负数时没意义.

经计算, 取 B, C, D, E , 这时

$$A = 0.5C + 0.5D + 0E + 0F; \quad F = 1.5C + 0.5D + 0E + 0F.$$

所以可以 B, C, D, E 调出所 H 六种.

(2) (1)知, H 列的极大线性无关组中必含 D, E , 而 A, B, C, F 中的某一个被其 H 4个线性表出时, 系数非负的只 A, F 被 B, C, D, E 表出,



习题3.5(P_{118} P_{122})

其 列均可以 极大线性无关组线性表出,但在实际问题中,表出系数为负数时没 意义.

经计算,取 B, C, D, E , 这时

$$A = 0.5C + 0.5D + 0E + 0F; \quad F = 1.5C + 0.5D + 0E + 0F.$$

所以可以 B, C, D, E 调出所 六种.

(2) (1)知, H 列的极大线性无关组中必含 D, E ,

而 A, B, C, F 中的某 一个被其 4个线性表出时,系数非负的只

A, F 被 B, C, D, E 表出,所以最小的调味品集是唯一的,它们是 B, C, D, E .



习题3.5(P_{118} P_{122})

其列均可以极大线性无关组线性表出,但在实际问题中,表出系数为负数时没意义.

经计算,取 B, C, D, E ,这时

$$A = 0.5C + 0.5D + 0E + 0F; \quad F = 1.5C + 0.5D + 0E + 0F.$$

所以可以 B, C, D, E 调出所 六 $E + 0791001 \ 2000 \ 02534165600$

+ ON

习题3.5(P_{118} P_{122})

$$K = \begin{pmatrix} 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 18 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1 & 3.25 \end{pmatrix}$$

初等行变
!
阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & 4.5 & 6 & 11.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等行变
!
规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

K 的规范阶梯形知,
所需调味品 $= 0A + 2.5B + 1.5C + D + 0E + 0F$,



习题3.5(P_{118} P_{122})

K 的规范阶梯形知,

所需调味品 = $0A + 2.5B + 1.5C + D + 0E + 0F$,

所以, 配制此调味品, 需要2.5包 B , 1.5包 C , 1包 D .



习题3.5(P_{118} P_{122})

K 的规范阶梯形知,

所需调味品 = $0A + 2.5B + 1.5C + D + 0E + 0F$,

所以, 配制此调味品, 需要2.5包 B , 1.5包 C , 1包 D .

(4)以 B, C, D, E 以及所需调味品成分为列构造矩阵 M , 并对 M 进行初等行变, 为阶梯形, 进而 为规范阶梯形.



习题3.5(P_{118} P_{122})

K 的规范阶梯形知,

所需调味品 = $0A + 2.5B + 1.5C + D + 0E + 0F$,

所以, 配制此调味品, 需要2.5包 B , 1.5包 C , 1包 D .

(4)以 B, C, D, E 以及所需调味品成分为列构造矩阵 M , 并对 M 进行初等行变, 为阶梯形, 进而为规范阶梯形.

$$M = \begin{pmatrix} 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 12 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 35 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 35 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1 & 17.5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\substack{\text{初等行变} \\ !}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题3.5(P_{118} P_{122})

M 的规范阶梯形中出现了主元，所以所给成分的调味品不可能 这6种调味品配制出 .

特别说明：教材原题第(3)小题中的数据 误，更正为：红
椒18、 姜18、或椒9、欧莳萝9、大蒜粉4.5、盐4.5、丁香
3.25.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

