线性代数
第三章：向量空

州学院　数学与　　学院

目录

3.2 n维数组向量空

设F是复数　或实数　，　F^n为F 上　有的“n维数组向量”组成的　合，

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad a_k \in F; k = 1; 2; \ldots; n \right\};$$

3.2 n维数组向量空

设F是复数 或实数 ， F^n为F 上 有的“n维数组向量”组成的 合，

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad a_k \in F, k = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

F^n中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，

3.2 n维数组向量空

设F是复数　或实数　，　F^n为F 上　有的“n维数组向量”组成的　合，

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_k \in F, k = 1, 2, \ldots, n \right\};$$

F^n中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，$a_k$称为$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$的第$k$个分量，$k = 1, 2, \ldots, n$.

3.2 n维数组向量空

设F是复数 或实数 ， F^n为F 上 有的“n维数组向量”组成的 合，

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \; a_k \in F, k = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

F^n中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，$a_k$称为$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$的第$k$个分量，$k = 1, 2, \ldots, n$.

常用 ; ; 等小写的希腊字母来 示F^n中的向量.

3.2 n维数组向量空

F^n也是F上的$n \times 1$ 阵的全 ，对照 阵运 ，F^n中有

定义：

3.2 n维数组向量空

F^n也是F上的$n \times 1$ 阵的全 ，对照 阵运 ，F^n中有定义：

1.F^n中两个向量的相等

3.2 n维数组向量空

F^n也是F上的$n \times 1$ 阵的全 ，对照 阵运 ，F^n中有定义：

1.F^n中

3.2 n维数组向量空

F^n也是F上的$n \times 1$ 阵的全 ，对照 阵运 ，F^n中有定义：

1.F^n中两个向量的相等

F^n中两个向量 $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，若满足

3.2 n维数组向量空

2.F^n 中的 法运

设 $=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意两个元 ($n$ 维向量),

称向量 $=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$ 为 $=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 与 $=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的和.

3.2 n维数组向量空

2.F^n 中的 法运

设 $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意两个元 ($n$ 维向量),

称向量 $= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ 为 $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 与 $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的和.

作: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$, 或 $+ \quad = \quad .$

3.2 n维数组向量空

F^n中的 法运 满足以下性质

设 $=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$; $=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$; $=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

3.2 n维数组向量空

F^n中的 法运 满足以下性质

设 $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

(1°) 法 有 换律.

3.2 n维数组向量空

F^n中的　法运　满足以下性质

设 $\quad = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意的n维数组向量，则

(1°)　法　有　换律.

$$\quad + \quad = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \quad + \quad$$

3.2 n维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

3.2 n维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$(\quad + \quad) + \quad = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$(\ \ +\ \ )+\ \ =\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$(\quad + \quad) + \quad = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \vdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(2°)　法满足　合律.

$$
(\quad + \quad) + \quad = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \vdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_1 + c_1) \\ (b_2 + c_2) \\ \vdots \\ (b_n + c_n) \end{pmatrix}
$$

3.2 n维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$(\ +\ )+\ =\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (b_1+c_1) \\ (b_2+c_2) \\ \vdots \\ (b_n+c_n) \end{pmatrix}=\ +(\ +\ ).$$

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量， 作0.

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量， 作0.

任意的 $\in F^n$，都有 $+0=0+ \quad =$.

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量， 作0.

任意的 $\in F^n$，都有 $+0=0+ \;=\;$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量， 作0.

任意的 $\in F^n$，都有 $+0=0+ \; = \;$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

，任意 $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$，存在 $= \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \in F^n$，使

得 $+ \; = 0$.

3.2 n维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量， 作0.

任意的 $\in F^n$，都有 $+0=0+ \quad = \quad$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

，任意 $=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\in F^n$，存在 $=\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}\in F^n$，使

得 $+ \quad =0$.

称满足 $+ \quad =0$ 的向量 为向量 的负向量.

作 $= -$.

3.2 n维数组向量空

3.F 中的数与F^n的数乘运　.

3.2 n维数组向量空

3.F中的数与F^n的数乘运

设k为F 中的数， $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$为$F^n$中的向量，称$F^n$中的向量 $= \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 为k与 的积.

3.2 n维数组向量空

F中的数k与F^n中的n维数组向量 的数积， 是用k乘n维数组向量 的每一个分量.

设$k; l$是F中的任意数， $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运 满足以下性质

3.2 n维数组向量空

F中的数k与F^n中的n维数组向量 的数积， 是用k乘n维数组向量 的每一个分量.

设k, l是F中的任意数， $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运 满足以下性质

(5°)幺模性质.

3.2 n维数组向量空

F中的数k与F^n中的n维数组向量 的数积， 是用k乘n维数组向量 的每一个分量.

设$k; l$是F中的任意数， $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运 满足以下性质

(5°)幺模性质. $1 \quad = \quad .$

3.2 n维数组向量空

(6°) 合律.

3.2 n维数组向量空

(6°) 合律.

$$(kl) = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(6°) 合律.

$$(kl)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(6°) 合律.

$$(kl)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(6°) 合律.

$$(kl) = \begin{pmatrix}(kl)a_1\\(kl)a_2\\\vdots\\(kl)a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k(la_1)\\k(la_2)\\\vdots\\k(la_n)\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}la_1\\la_2\\\vdots\\la_n\end{pmatrix} = k(l\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})$$

3.2 n维数组向量空

(6°)　合律.

$$(kl) = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix} =$$

$$k(l\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = k(l\quad).$$

3.2 n维数组向量空

(7°)对数的　法　有分配律.

3.2

0

$(k+l) \quad =$ B B B B B B @

3.2 n维数组向量空

(7°)对数的 法 有分配律.

$$(k+l) \quad = \begin{pmatrix} (k+l)a_1 \\ (k+l)a_2 \\ \vdots \\ (k+l)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1+la_1 \\ ka_2+la_2 \\ \vdots \\ ka_n+la_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(7°)对数的 法 有分配律.

$$(k+l)\alpha = \begin{pmatrix} (k+l)a_1 \\ (k+l)a_2 \\ \vdots \\ (k+l)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1+la_1 \\ ka_2+la_2 \\ \vdots \\ ka_n+la_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(7°)对数的 法 有分配律.

$$(k+l) \quad = \begin{pmatrix} (k+l)a_1 \\ (k+l)a_2 \\ \vdots \\ (k+l)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1+la_1 \\ ka_2+la_2 \\ \vdots \\ ka_n+la_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix} = k \quad + l \quad .$$

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的　法　有分配律.

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的 法 有分配律.

$$k(\quad + \quad) = k\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的　法　有分配律.

$$k(\quad + \quad) = k\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ k(a_2 + b_2) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的　法，有分配律.

$$k(\quad+\quad)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的　法　有分配律.

$$k(\quad+\quad)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kb_1\\kb_2\\\vdots\\kb_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

(8°)对F^n中向量的 法 有分配律.

$$k(\quad+\quad)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kb_1\\kb_2\\\vdots\\kb_n\end{pmatrix}=k\quad+k\quad:$$

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、 法、数积运 ，这样也给出了F^n的一种 构，称这种 构为**向量空** .

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、 法、数积运 ，这样也给出了F^n的一种 构，称这种 构为向量空 .

定义3.1 数 F(实数 或复数)上 有n元有序数组组成的 合F^n定义了相等关系，以 " 法"和"数积"运 ，且 " 法"与"数积"满足运 性质$(1°)$ ~性质$(8°)$，则称F^n按定义的运 构成了一个n维向量空 .F^n中的元 称为n维向量.

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、 法、数积运 ，这样也给出了F^n的一种 构，称这种 构为向量空 .

定义3.1 数 F(实数 或复数)上 有n元有序数组组成的 合F^n定义了相等关系，以 “ 法”和“数积”运 ，且 “ 法”与“数积”满足运 性质(1°) ∼性质(8°)，则称F^n按 定义的运 构成了一个n维向量空 .F^n中的元 称为n维向量.

在n维向量空 F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的 “ 法”运 ： $-\ = \ +(-\ )$.

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、 法、数积运 ，这样也给出了F^n的一种 构，称这种 构为向量空 .

定义3.1 数 F(实数 或复数)上 有n元有序数组组成的 合F^n定义了相等关系，以 “ 法”和“数积”运 ，且 “ 法”与“数积”满足运 性质(1°) $\sim$性质(8°)，则称F^n按定义的运 构成了一个n维向量空 .F^n中的元 称为n维向量.

在n维向量空 F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的 “ 法”运 ： $-$ $=$ $+(-$ $)$.

在n维向量空 F^n中，还有以下运 性质

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、 法、数积运 ，这样也给出了F^n的一种 构，称这种 构为向量空 .

定义3.1 数 F(实数 或复数)上 有n元有序数组组成的 合F^n定义了相等关系，以 “ 法”和“数积”运 ，且“ 法”与“数积”满足运 性质(1°) ~性质(8°)，则称F^n按定义的运 构成了一个n维向量空 .F^n中的元 称为n维向量.

在n维向量空 F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“ 法”运 ： $- \quad = \quad + (- \quad)$.

在n维向量空 F^n中，还有以

3.2 n维数组向量空

F^n中定义了相等关系、　法、数积运　，这样也给出了F^n的一种　构，称这种　构为向量空　.

定义3.1 数　F(实数　或复数　)上　有n元有序数组组成的　合F^n定义了相等关系，以　“　法”和“数积”运　，且“　法”与“数积”满足运　性质(1°) ~性质(8°)，则称F^n按　定义的运　构成了一个n维向量空　.F^n中的元　称为n维向量.

在n维向量空　F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“　法”运　：$-\ \ = \ \ +(-\ \ )$.

在n维向量空　F^n中，还有以下运　性质

(9°)任意的　$\in F^n$; $k \in F$，则$k\ \ = 0 \Leftrightarrow k = 0$或　$= 0$.

(10°)任意的　$\in F^n$，则$-\ \ = (-1)\ \ $.

3.2 n维数组向量空

F^n中，由若干个向量构成的整　称为向量组.

3.2 n维数组向量空

F^n中，由若干个向量构成的整　称为向量组.

设 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$是m个n 维向量构成的向量组，

$k_1; k_2; \ldots; k_m$ 是F中m 个数，则$k_1 \ _1 + k_2 \ _2 + \cdots + k_m \ _m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为 $_1; \ _2; \ldots; \ _m$ 的一个线性组合.

数$k_1; k_2; \ldots; k_m$ 称为这个组合的系数.

3.2 n维数组向量空

F^n中，由若干个向量构成的整　称为向量组.

设 $_1;\ \ _2;\ldots;\ \ _m$是m个n 维向量构成的向量组，$k_1;k_2;\ldots;k_m$ 是F中m 个数，则$k_1\ \ _1+k_2\ \ _2+\cdots+k_m\ \ _m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为 $_1;\ \ _2;\ldots;\ \ _m$ 的一个线性组合. 数$k_1;k_2;\ldots;k_m$ 称为这个组合的系数.

对F^n中给定的$m+1$个n 维向量 $_1;\ \ _2;\ldots;\ \ _m;$　，若存在F中的一组数$c_1;c_2;\ldots;c_m$ ，使得

$$c_1\ \ _1+c_2\ \ _2+\cdots+c_m\ \ _m=\ \ ;$$

则称　可以由向量组 $_1;\ \ _2;\ldots;\ \ _m$ 线性　出.

3.2 n维数组向量空

F^n中，由若干个向量构成的整　称为向量组.

设 ${}_1; {}_2; :::; {}_m$是m个n 维向量构成的向量组，
$k_1;k_2;:::;k_m$ 是F中m 个数，则$k_1 {}_1 + k_2 {}_2 + \cdots + k_m {}_m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为 ${}_1; {}_2;:::; {}_m$ 的一个线性组合.
数$k_1;k_2;:::;k_m$ 称为这个组合的系数.

对F^n中给定的$m+1$个n 维向量 ${}_1; {}_2;:::; {}_m;$　，若存在F中的一组数$c_1;c_2;:::;c_m$ ，使得

$$c_1 {}_1 + c_2 {}_2 + \cdots + c_m {}_m = \ ;$$

则称　可以由向量组 ${}_1; {}_2;:::; {}_m$ 线性　出.

也　　是向量组 ${}_1; {}_2;:::; {}_m$ 的一个线性组合.

3.2 n维数组向量空

设

$$_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

3.2 n维数组向量空

设

$${}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad {}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};$$

3.2 n维数组向量空

设

$$_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad _2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \cdots; \quad _n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

3.2 n维数组向量空

设

$$_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ _2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \cdots;\ _n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};\ = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

3.2 n维数组向量空

设

$$ {}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad {}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad {}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, $$

由数组向量空 中向量的运 以 相等关系，线性方程组

$$ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} $$

可以 述成$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n = \quad .$

3.2 n维数组向量空

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

3.2 n维数组向量空

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$$

，求线性方程组的　，　是求系数$x_1; x_2; \ldots; x_n$，使得$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$　成立.

3.2 n维数组向量空

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$$

，求线性方程组的 ， 是求系数$x_1; x_2; \cdots; x_n$，使得$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$ 成立.

判定线性方程组是否有 ， 是判断m维向量 能否由m维向量组 ${}_1;$ ${}_2; \cdots;$ ${}_n$线性 出，

3.2 n维数组向量空

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$$

，求线性方程组的 ， 是求系数$x_1; x_2; \ldots; x_n$，使得$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n =$ 成立.

判定线性方程组是否有 ， 是判断m维向量 能否由m维向量组 ${}_1;\ {}_2; \ldots;\ {}_n$线性 出，

或者 是判断向量 是否是向量组 ${}_1;\ {}_2; \ldots;\ {}_n$ 的一个线性组合.

3.2 n维数组向量空

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ 有

3.2 n维数组向量空

$$
\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \text{有}
$$

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1; x_2; :::; x_n$使得$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \cdots + x_n \quad {}_n = \quad$ 成立

3.2 n维数组向量空

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ 有

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1; x_2; \colon \colon \colon ; x_n$使得$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \cdots + x_n \ _n =$ 成立

$\Leftrightarrow$ 可以由向量组 $_1; \ _2; \colon \colon \colon ; \ _n$线性 出:

3.2 n维数组向量空

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ 有

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1, x_2, \ldots, x_n$使得$x_1\ _1 + x_2\ _2 + \cdots + x_n\ _n =$ 成立

$\Leftrightarrow$ 可以由向量组 $_1, \ _2, \ldots, \ _n$线性 出.

线性方程组 的判定问 归 为：方程组的常数列向量能能由未知量的系数列向量组线性 出.

3.2 n维数组向量空

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ 有

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1; x_2; :::; x_n$使得$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \cdots + x_n \ _n =$ 成立

$\Leftrightarrow$ 可以由向量组 $_1;\ _2; :::;\ _n$线性 出:

线性方程组 的判定问 归 为：方程组的常数列向量能能由未知量的系数列向量组线性 出.

研 线性方程组有没有 ， 要去研 向量 能否由向量组 $_1;\ _2; :::;\ _n$线性 出;

3.2 n维数组向量空

F^n中的任意向量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _n$ 以 向量 ，判断 是否可以由向量组 $_1; \ _2; \ldots; \ _n$线性 出， 是判断线性方程组 $x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \cdots + x_n \ _n =$ 是否有 .

3.2 n维数组向量空

F^n中的任意向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _n$ 以 向量 ，判断 是否可以由向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _n$线性 出， 是判断线性方程组 $x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + \cdots + x_n \ _n =$ 是否有 .

例3.1 设

$$_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad _2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad _3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

判断 是否可以由向量组 $_1; \ _2; \ _3$线性 出.若能 出，写出 的一种 示方法.

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1; x_2; x_3$，使得$x_1\ _1 + x_2\ _2 + x_3\ _3 =$ 成立.

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1;x_2;x_3$，使得$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 成立.也是判断线性方程组$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 是否有 .

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1;x_2;x_3$，使得$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 成立.也是判断线性方程组$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 是否有 .

构作以 $_1;\ _2;\ _3;$ 为列的 阵， ，方程组的增广 阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&5&1&2\\2&-5&-3&-1\\-3&12&6&3\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;$ $_2;$ $_3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1; x_2; x_3$，使得$x_1 \ {}_1 + x_2 \ {}_2 + x_3 \ {}_3 =$ 成立.也是判断线性方程组$x_1 \ {}_1 + x_2 \ {}_2 + x_3 \ {}_3 =$ 是否有 .

构作以 $_1;$ $_2;$ $_3;$ 为列的 阵， ，方程组的增广 阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对 阵$\overline{A}$ 行初等行 换，化其成 形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1;x_2;x_3$，使得$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 成立.也是判断线性方程组$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 是否有 .

构作以 $_1;\ _2;\ _3;$ 为列的 阵， ，方程组的增广 阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对 阵$\overline{A}$ 行初等行 换，化其成 形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性 出， 是判定是否存在系数$x_1;x_2;x_3$，使得$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 成立.也是判断线性方程组$x_1\ _1+x_2\ _2+x_3\ _3=$ 是否有 .

构作以 $_1;\ _2;\ _3;$ 为列的 阵， ，方程组的增广 阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对 阵$\overline{A}$ 行初等行 换，化其成 形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 \\ 0 & 27 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

0
$1 \quad 5 \quad 1 \quad 2$
B
$\longrightarrow$ @

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

形　阵中的最后一列没有主元，　以以$\overline{A}$为增广　阵的线性方程组一定有　.

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

形　阵中的最后一列没有主元，　以以$\overline{A}$为增广　阵的线性方程组一定有　.

存在系数$x_1; x_2; x_3$，使得$x_1 \ _1 + x_2 \ _2 + x_3 \ _3 =$　成立，　可以由向量组 $_1;\ _2;\ _3$ 线性　出.

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以$\overline{A}$为增广 阵的线性方程组一定有 .

存在系数$x_1; x_2; x_3$ ，使得$x_1 \ {}_1 + x_2 \ {}_2 + x_3 \ {}_3 =$ 成立， 可以由向量组 $_1;$ $_2;$ $_3$ 线性 出.

对 形 阵 一 行初等行 换，化为规范 形

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

形　阵中的最后一列没有主元，　以以$\overline{A}$为增广　阵的线性方程组一定有　.

存在系数$x_1; x_2; x_3$，使得$x_1 \ {}_1 + x_2 \ {}_2 + x_3 \ {}_3 =$　成立，　可以由向量组 ${}_1; \ {}_2; \ {}_3$ 线性　出.

对　形　阵　一　行初等行　换，化为规范　形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

3.2 n维数组向量空

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

形　阵中的最后一列没有主元，　以以$\overline{A}$为增广　阵的线性方程组一定有　.

存在系数$x_1; x_2; x_3$，使得$x_1 \; {}_1 + x_2 \; {}_2 + x_3 \; {}_3 =$　成立，　可以由向量组 $_1; \; _2; \; _3$ 线性　出.

对　形　阵　一　行初等行　换，化为规范　形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2

$$\begin{matrix} \frac{\ }{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{matrix}$$，其中x_3是 由

知 .

取$x_3 = 1$， $x_1 = 1$

3.2 n维数组向量空

对应的方程组有 ： $\left(\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{array}\right.$ ，其中x_3是自由未知量.

取$x_3 = 1$，则$x_1 = 1; x_2 = 0$，于是 $= \ _1 + \ _3$.

注：在有 的情形下， 形 阵的主元个数为2，小于未知量个数3，从而方程组有无穷多个 ，因此 可以由向量组 $_1$; $_2$; $_3$ 线性 出的方式有无穷多种.

3.2 n维数组向量空

对应的方程组有 ： $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$ ，其中x_3是自由未知量.

取$x_3 = 1$，则$x_1 = 1; x_2 = 0$，于是 $= \ _1 + \ _3$.

注：在有 的情形下， 形 阵的主元个数为2，小于未知量个数3，从而方程组有无穷多个 ，因此 可以由向量组 $_1;$ $_2;$ $_3$ 线性 出的方式有无穷多种.

由于线性方程组未 都有 ， 以在n 维向量空 F^n中， 未 可以由向量组 $_1;$ $_2; \cdots;$ $_m$ 线性 出.

3.2 n维数组向量空

问　是：给定的向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 满足什么　征，任意的向量　都可以由向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 线性　出？

3.2 n维数组向量空

问　是：给定的向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 满足什么　征，任意的向量　都可以由向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 线性　出？而在可以　出时，需要满足什么　，　可以使　示的方式唯一或者　唯一？

3.2 n维数组向量空

问　是：给定的向量组 $_1;\ \ _2; \cdots; \ \ _m$ 满足什么　征，任意的向量　都可以由向量组 $_1;\ \ _2; \cdots; \ \ _m$ 线性　出？而在可以　出时，需要满足什么　　，　可以使　示的方式唯一或者　唯一？

F^n中任意的向量组 $_1;\ \ _2; \cdots; \ \ _m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0\ \ _1 + 0\ \ _2 + \cdots + 0\ \ _m = 0;$$

，0向量可以由任意向量组线性　出.

3.2 n维数组向量空

问 是：给定的向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ 满足什么 征，任意的向量 都可以由向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ 线性 出？而在可以出时，需要满足什么 ， 可以使 示的方式唯一或者 唯一？

F^n中任意的向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0 \ _1 + 0 \ _2 + \cdots + 0 \ _m = 0;$$

，0向量可以由任意向量组线性 出.自然的想法是：0向量给定向量组 $_1; \ _2; \dots; \ _m$ 线性 出时，系数是否一定要都取0？

这个问 是 论向量组属性的“分 岭”，是下一 的主要内容.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com