

线性代数

第三章：向量空

州学院 数学与 学院



目录

1 3.2 n 维数组向量空



3.2 n 维数组向量空

设 F 是复数 或实数 , F^n 为 F 上 有的“ n 维数组向量”组成的 合,

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_k \in F; k = 1, 2, \dots, n \right\};$$



3.2 n 维数组向量空

设 F 是复数 或实数 , F^n 为 F 上 有的“ n 维数组向量” 组成的 合,

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_k \in F; k = 1; 2; \dots; n \right\};$$

F^n 中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为 F 上的 n 维向量,



3.2 n 维数组向量空

设 F 是复数 或实数 , F^n 为 F 上 有的“ n 维数组向量” 组成的 合,

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_k \in F; k = 1; 2; \dots; n \right\};$$

F^n 中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为 F 上的 n 维向量, a_k 称为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的第 k 个

分量, $k = 1; 2; \dots; n$.



3.2 n 维数组向量空

设 F 是复数 或实数 , F^n 为 F 上 有的“ n 维数组向量” 组成的 合,

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_k \in F; k = 1; 2; \dots; n \right\};$$

F^n 中的元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为 F 上的 n 维向量, a_k 称为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的第 k 个

分量, $k = 1; 2; \dots; n$.

常用 α, β, γ 等小写的希腊字母来 示 F^n 中的向量.



3.2 n 维数组向量空

F^n 也是 F 上的 $n \times 1$ 阵的全 , 对照 阵运 , F^n 中有定义:



3.2 n 维数组向量空

F^n 也是 F 上的 $n \times 1$ 阵的全 , 对照 阵运 , F^n 中有定义:

1. F^n 中两个向量的相等



3.2 n 维数组向量空

F^n 也是 F 上的 $n \times 1$ 阵的全 , 对照 阵运 , F^n 中有
定义:

1. F^n 中



3.2 n 维数组向量空

F^n 也是 F 上的 $n \times 1$ 阵的全 , 对照 阵运 , F^n 中有定义:

1. F^n 中两个向量的相等

$$F^n \text{中两个向量} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{若满足}$$



3.2 n 维数组向量空2. F^n 中的 法运

设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ @ & \vdots \\ A & A \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & b_2 \\ @ & \vdots \\ A & A \end{pmatrix}$ 是 F^n 中任意两个元 (n 维向量),

称向量 $\begin{pmatrix} 0 & a_n & 1 \\ a_1 + b_1 & b_n \\ a_2 + b_2 \\ @ & \vdots \\ A & A \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ @ & \vdots \\ A & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & b_2 \\ @ & \vdots \\ A & A \end{pmatrix}$ 的和.



3.2 n 维数组向量空2. F^n 中的 法运

设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$ 是 F^n 中任意两个元 (n 维向量),

称向量 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n + b_n & c_n \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$ 的和.

作: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n + b_n & c_n \end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n + b_n & c_n \end{pmatrix}$.



3.2 n 维数组向量空

F^n 中的 法运 满足以下性质

$$\text{设 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \textcircled{A} & \vdots \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \textcircled{A} & \vdots \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \textcircled{A} & \vdots \end{pmatrix} \text{ 是 } F^n \text{ 中任意的 } n \text{ 维数}$$

组向量，则



3.2 n 维数组向量空

F^n 中的法运满足以下性质

设 $\begin{matrix} 0 & 1 \\ \text{B} & \text{C} \\ \text{a}_1 & \\ \text{a}_2 & \\ \vdots & \\ \text{a}_n & \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ \text{B} & \text{C} \\ \text{b}_1 & \\ \text{b}_2 & \\ \vdots & \\ \text{b}_n & \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ \text{B} & \text{C} \\ \text{c}_1 & \\ \text{c}_2 & \\ \vdots & \\ \text{c}_n & \end{matrix}$ 是 F^n 中任意的 n 维数组向量，则

(1°) 法有换律.





3.2 n 维数组向量空

F^n 中的 法运 满足以下性质

设 $\begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 & \\ \vdots & \\ b_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ c_1 & \\ \vdots & \\ c_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix}$ 是 F^n 中任意的 n 维数组向量，则

(1°) 法 有 换律.

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & \\ \vdots & \\ a_n + b_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 + a_1 & \\ \vdots & \\ b_n + a_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 + a_1 & \\ \vdots & \\ b_n + a_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & \\ \vdots & \\ a_n + b_n & \end{matrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \vdots \\ \text{A} \end{matrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n + c_n \end{pmatrix}
 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ (a_1 + b_1) + c_1 \\ \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{array}
 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$\begin{aligned}
 (\quad + \quad) + \quad &= \begin{array}{c} 0 \qquad 1 \\ a_1 + b_1 \quad c_1 \\ \text{⌈} \quad \quad \quad \text{⌋} \\ a_2 + b_2 \quad c_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_n + b_n \quad c_n \end{array} + \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ c_1 \quad c_2 \\ \text{⌈} \quad \quad \quad \text{⌋} \\ c_2 \quad c_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ c_n \quad c_{n+1} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \qquad 1 \\ (a_1 + b_1) + c_1 \\ \text{⌈} \quad \quad \quad \text{⌋} \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{array} = \\
 \begin{array}{c} 0 \qquad 1 \\ a_1 + (b_1 + c_1) \\ \text{⌈} \quad \quad \quad \text{⌋} \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{array}
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$\begin{aligned}
 (\quad + \quad) + \quad &= \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 + b_1 \quad c_1 \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} + \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ c_1 \quad c_2 \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} = \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} &= \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 \quad c_1 \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} + \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ (b_1 + c_1) \\ (b_2 + c_2) \\ \text{⋮} \quad \text{⋮} \\ @ \quad A \end{array} = \\
 \begin{array}{c} a_n + (b_n + c_n) \end{array} &= \begin{array}{c} a_n \end{array} + \begin{array}{c} (b_n + c_n) \end{array}
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(2°) 法满足 合律.

$$\begin{aligned}
 (\quad + \quad) + \quad &= \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 + b_1 \\ \text{⋮} \\ a_n + b_n \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ c_1 \\ \text{⋮} \\ c_n \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ (a_1 + b_1) + c_1 \\ \text{⋮} \\ (a_n + b_n) + c_n \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 + (b_1 + c_1) \\ \text{⋮} \\ a_n + (b_n + c_n) \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ a_1 \\ \text{⋮} \\ a_n \end{array} + \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ (b_1 + c_1) \\ \text{⋮} \\ (b_n + c_n) \end{array} \\
 &= \quad + (\quad + \quad).
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n 中分量全为0的 n 维数组向量, 称为 n 维0向量, 作0.



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n 中分量全为0的 n 维数组向量, 称为 n 维0向量, 作0.

任意的 $\alpha \in F^n$, 都有 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n 中分量全为0的 n 维数组向量, 称为 n 维0向量, 作0.

任意的 $\alpha \in F^n$, 都有 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(4°) F^n 中每一个向量都存在负向量.



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n 中分量全为0的 n 维数组向量, 称为 n 维0向量, 作0.

任意的 $\in F^n$, 都有 $+ 0 = 0 + =$.

(4°) F^n 中每一个向量都存在负向量.

$$\text{, 任意 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{pmatrix} \in F^n, \text{ 存在 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & \\ -a_2 & \\ \vdots & \\ -a_n & \end{pmatrix} \in F^n, \text{ 使}$$

得 $+ = 0$.



3.2 n 维数组向量空

(3°) 法运 存在0向量.

F^n 中分量全为0的 n 维数组向量, 称为 n 维0向量, 作0.

任意的 $\in F^n$, 都有 $+ 0 = 0 + =$.

(4°) F^n 中每一个向量都存在负向量.

$$\text{, 任意 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{pmatrix} \in F^n, \text{ 存在 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & \\ -a_2 & \\ \vdots & \\ -a_n & \end{pmatrix} \in F^n, \text{ 使}$$

得 $+ = 0$.

称满足 $+ = 0$ 的向量 为向量 的负向量.

作 $= -$.



3.2 n 维数组向量空

3. F 中的数与 F^n 的数乘运 .



3.2 n 维数组向量空3. F 中的数与 F^n 的数乘运

设 k 为 F 中的数, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为 F^n 中的向量, 称 F^n 中的向

量 $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 为 k 与 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的积.







3.2 n 维数组向量空

F 中的数 k 与 F^n 中的 n 维数组向量 的数积, 是用 k 乘 n 维数组向量 的每一个分量.

$$\text{设 } k; l \text{ 是 } F \text{ 中的任意数, } \begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 & C \\ @ & : A \\ a_n & \end{matrix}; \quad = \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 & C \\ @ & : A \\ b_n & \end{matrix} \text{ 是 } F^n \text{ 中任意}$$

向量.

数积运 满足以下性质



3.2 n 维数组向量空

F 中的数 k 与 F^n 中的 n 维数组向量 的数积, 是用 k 乘 n 维数组向量 的每一个分量.

$$\text{设 } k, l \text{ 是 } F \text{ 中的任意数, } \begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 & C \\ @ & : \\ & A \\ a_n & \end{matrix}; \quad = \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 & C \\ @ & : \\ & A \\ b_n & \end{matrix} \text{ 是 } F^n \text{ 中任意}$$

向量.

数积运 满足以下性质
(5°) 么模性质.



3.2 n 维数组向量空

F 中的数 k 与 F^n 中的 n 维数组向量 的数积, 是用 k 乘 n 维数组向量 的每一个分量.

$$\text{设 } k, l \text{ 是 } F \text{ 中的任意数, } \begin{matrix} 0 & 1 \\ a_1 & C \\ @ & : \\ & A \\ a_n & \end{matrix}; \quad = \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_1 & C \\ @ & : \\ & A \\ b_n & \end{matrix} \text{ 是 } F^n \text{ 中任意}$$

向量.

数积运 满足以下性质

(5°) 么模性质. $1 =$.



3.2 n 维数组向量空

(6°) 合律.



3.2 n 维数组向量空

(6°) 合律.

$$(kI) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (kI)a_1 & C \\ (kI)a_2 & C \\ @ & \vdots & C \\ & (kI)a_n & A \end{pmatrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(6°) 合律.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ (kl) & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ (kl) & a_n \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ k(la_1) & \\ \vdots & \vdots \\ k(la_n) & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 = k
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ la_1 & \\ \vdots & \vdots \\ la_n & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_1 & \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 = k(l)
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_1 & \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

(6°) 合律.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ (kl) & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ (kl) & a_n \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ k(la_1) & \\ \vdots & \vdots \\ k(la_n) & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 = k
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ la_1 & \\ \vdots & \vdots \\ la_n & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_1 & \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \end{array} \\
 @ \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}
 = k(l) :$$



3.2 n 维数组向量空

(7°)对数的 法 有分配律.



3.2

$$(k+1) = \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(7°)对数的法有分配律.

$$(k + l) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k + l)a_1 \\ (k + l)a_2 \\ \vdots \\ (k + l)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + la_1 \\ ka_2 + la_2 \\ \vdots \\ ka_n + la_n \end{pmatrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(7°)对数的法有分配律.

$$\begin{aligned}
 (k+l) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (k+l)a_1 & (k+l)a_2 \\ \vdots & \vdots \\ (k+l)a_n & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ ka_1 + la_1 & ka_2 + la_2 \\ \vdots & \vdots \\ ka_n + la_n & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ ka_1 & la_1 \\ \vdots & \vdots \\ ka_n & la_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ la_1 & la_2 \\ \vdots & \vdots \\ la_n & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(7°)对数的法有分配律.

$$\begin{aligned}
 (k+I)A &= \begin{pmatrix} (k+I)a_1 \\ (k+I)a_2 \\ \vdots \\ (k+I)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + Ia_1 \\ ka_2 + Ia_2 \\ \vdots \\ ka_n + Ia_n \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ia_1 \\ Ia_2 \\ \vdots \\ Ia_n \end{pmatrix} = kA + IA :
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(8°)对 F^n 中向量的 法 有分配律.



3.2 n 维数组向量空

(8°)对 F^n 中向量的 法 有分配律.

$$k \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = k \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(8°) 对 F^n 中向量的 法 有分配律.

$$k \left(\begin{matrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{matrix} \right) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \text{B} & \text{C} \\ \text{A} & \text{A} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ k(a_1 + b_1) & k(a_2 + b_2) \\ \vdots & \vdots \\ k(a_n + b_n) & k(a_n + b_n) \end{matrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(8°)对 F^n 中向量的 法 有分配律.

$$k \left(\begin{matrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{matrix} \right) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \text{B} & \text{C} \\ @ & \text{A} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ k(a_1 + b_1) & k(a_2 + b_2) \\ @ & \vdots \\ & \text{A} \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ ka_1 + kb_1 & \\ \text{B} & \text{C} \\ @ & \vdots \\ & \text{A} \\ ka_n + kb_n & \end{matrix}$$



3.2 n 维数组向量空

(8°) 对 F^n 中向量的 法 有分配律.

$$\begin{aligned}
 k \left(\begin{matrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{matrix} \right) &= k \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ k(a_2 + b_2) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ka_1 + kb_1 \\ ka_2 + kb_2 \\ \vdots \\ ka_n + kb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \\ \vdots \\ kb_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

(8°) 对 F^n 中向量的 法 有分配律.

$$\begin{aligned}
 k \left(\begin{matrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{matrix} \right) &= k \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ k(a_2 + b_2) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ka_1 + kb_1 \\ ka_2 + kb_2 \\ \vdots \\ ka_n + kb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \\ \vdots \\ kb_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、 $+$ 法、数积运 $\cdot$ ，这样也给出了 F^n 的一种 $\langle \cdot, + \rangle$ 构，称这种 $\langle \cdot, + \rangle$ 构为**向量空**。



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、 $+$ 法、数积运 $\cdot$ ，这样也给出了 F^n 的一种结构，称这种结构为**向量空**。

定义3.1 数域 F (实数域或复数域)上有 n 元有序数组组成的集合 F^n 定义了相等关系，以 $+$ “ $+$ 法”和“数积”运 $\cdot$ ，且“ $+$ 法”与“数积”满足运 $\cdot$ 性质(1°)~性质(8°)，则称 F^n 按定义的运 $\cdot$ 构成了一个 n 维向量空。 F^n 中的元 α 称为 n 维向量。



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了 F^n 的一种结构，称这种结构为**向量空**。

定义3.1 数域 F (实数域或复数域) 上 n 元有序数组组成的集合 F^n 定义了相等关系，以“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°)~性质(8°)，则称 F^n 按定义的运算构成了一个 n 维向量空。 F^n 中的元称为 n 维向量。

在 n 维向量空 F^n 中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：
$$- = + (-).$$



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了 F^n 的一种结构，称这种结构为**向量空**。

定义3.1 数域 F (实数域或复数域)上所有 n 元有序数组组成的集合 F^n 定义了相等关系，以“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°)~性质(8°)，则称 F^n 按定义的运算构成了一个 n 维向量空。 F^n 中的元素称为 n 维向量。

在 n 维向量空 F^n 中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：
$$- = + (-).$$

在 n 维向量空 F^n 中，还有以下运算性质



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、 $+$ 法、数积运 $\cdot$ ，这样也给出了 F^n 的一种结构，称这种结构为**向量空**。

定义3.1 数 F (实数或复数)上有 n 元有序数组组成的集合 F^n 定义了相等关系，以 $+$ “ $+$ 法”和“数积”运 $\cdot$ ，且“ $+$ 法”与“数积”满足运 $\cdot$ 性质(1°)~性质(8°)，则称 F^n 按定义的运 $\cdot$ 构成了一个 n 维向量空。 F^n 中的元称为 n 维向量。

在 n 维向量空 F^n 中，利用“负向量”，可以定义向量的“ $-$ 法”运 $-$ ： $-x = +(-x)$ 。

在 n 维向量空 F^n 中，还有以



3.2 n 维数组向量空

F^n 中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了 F^n 的一种结构，称这种结构为**向量空**。

定义3.1 数域 F (实数域或复数域) 上有 n 元有序数组组成的集合 F^n 定义了相等关系，以“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°) ~ 性质(8°)，则称 F^n 按定义的运算构成了一个 n 维向量空。 F^n 中的元称为 n 维向量。

在 n 维向量空 F^n 中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：
$$- = + (-).$$

在 n 维向量空 F^n 中，还有以下运算性质

(9°) 任意的 $\alpha \in F^n$; $k \in F$ ，则 $k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0$ 或 $\alpha = 0$.

(10°) 任意的 $\alpha \in F^n$ ，则 $-\alpha = (-1)\alpha$ 。



3.2 n 维数组向量空

F^n 中, 由若干个向量构成的整 称为**向量组**.



3.2 n 维数组向量空

F^n 中, 由若干个向量构成的整 称为**向量组**.

设 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量构成的向量组,
 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 是 F 中 m 个数, 则 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$ 仍
 是 F^n 中的一个 n 维向量, 称为 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 的一个**线性组合**.
 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 称为这个组合的系数.



3.2 n 维数组向量空

F^n 中, 由若干个向量构成的整 称为**向量组**.

设 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量构成的向量组,
 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 是 F 中 m 个数, 则 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$ 仍
 是 F^n 中的一个 n 维向量, 称为 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 的一个**线性组合**.
 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 称为这个组合的系数.

对 F^n 中给定的 $m+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m; \alpha_{m+1}$, 若存
 在 F 中的一组数 $c_1; c_2; \dots; c_m$, 使得

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m = \alpha_{m+1};$$

则称 α_{m+1} 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ **线性** 出.



3.2 n 维数组向量空

F^n 中, 由若干个向量构成的整 称为**向量组**.

设 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量构成的向量组,
 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 是 F 中 m 个数, 则 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$ 仍
 是 F^n 中的一个 n 维向量, 称为 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 的一个**线性组合**.
 数 $k_1; k_2; \dots; k_m$ 称为这个组合的系数.

对 F^n 中给定的 $m+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m; \alpha_{m+1}$, 若存
 在 F 中的一组数 $c_1; c_2; \dots; c_m$, 使得

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m = \alpha_{m+1};$$

则称 α_{m+1} 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出.

也 α_{m+1} 是向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 的一个**线性组合**.



3.2 n 维数组向量空

设

$$I = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix};$$



3.2 n 维数组向量空

设

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 a_{11} & \\
 a_{21} & \\
 \vdots & \\
 @ & A \\
 a_{m1} &
 \end{array}
 \end{array}
 ; \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 a_{12} & \\
 a_{22} & \\
 \vdots & \\
 @ & A \\
 a_{m2} &
 \end{array}
 \end{array}
 ;$$



3.2 n 维数组向量空

设

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ @ & A \end{array} \\
 a_{m1}
 \end{array}
 ; \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{22} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ @ & A \end{array} \\
 a_{m2}
 \end{array}
 ; \cdots ; \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_{1n} & a_{2n} \\ a_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ @ & A \end{array} \\
 a_{mn}
 \end{array}
 ;$$



3.2 n 维数组向量空

设

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & 1 \\
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{1n} & & b_1 & & & & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{2n} & & b_2 & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 1 = & @ & : & A & ; & 2 = & @ & : & A & ; & \cdots & ; & n = & @ & : & A & ; & = & @ & : & A & ; \\
 & a_{m1} & & a_{m2} & & a_{mn} & & b_m & & & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

由数组向量空 中向量的运 以 相等关系，线性方程组

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} 8 \\ \text{wavy} \end{array} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
 \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \vdots \end{array} & & \vdots \\
 \cdot & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m
 \end{array}$$

可以 述成 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n =$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \vdots \\ \textcircled{m} \end{array} \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} = \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}
 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \\ \text{8} \end{array} \\
 \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \\
 \end{array}
 \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}
 \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ \vdots \\ = b_m \end{array}$$



$$x_1 \quad 1 + x_2 \quad 2 + \cdots + x_n \quad n =$$

，求线性方程组的 ，是求系数 $x_1; x_2; \cdots; x_n$ ，使得 $x_1 \quad 1 + x_2 \quad 2 + \cdots + x_n \quad n =$ 成立.

判定线性方程组是否有 ，是判断 m 维向量 能否由 m 维向量组 $1; 2; \cdots; n$ 线性 出，



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} \text{8} \\ \text{7} \\ \text{6} \\ \text{5} \\ \text{4} \\ \text{3} \\ \text{2} \\ \text{1} \end{array} \\
 \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \\
 \end{array} = \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}$$



$$x_1 \quad 1 + x_2 \quad 2 + \cdots + x_n \quad n =$$

，求线性方程组的 ， 是求系数 $x_1; x_2; \cdots; x_n$ ，使得 $x_1 \quad 1 + x_2 \quad 2 + \cdots + x_n \quad n =$ 成立.

判定线性方程组是否有 ， 是判断 m 维向量 能否由 m 维向量组 $1; 2; \cdots; n$ 线性 出，

或者 是判断向量 是否是向量组 $1; 2; \cdots; n$ 的一个线性组合.



3.2 n 维数组向量空

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{有}$$



3.2 n 维数组向量空

线性方程组

$$\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{cases}$$

有

$\Leftrightarrow$ 存在 $x_1; x_2; \cdots; x_n$ 使得 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n =$ 成立



3.2 n 维数组向量空

F^n 中的任意向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ 以 向量 α ，判断 α 是否
 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ 线性 出， 是判断线性方程组
 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \alpha$ 是否有 。



3.2 n 维数组向量空

F^n 中的任意向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ 以 向量 β ，判断 β 是否
可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ 线性 出， β 是判断线性方程组
 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \beta$ 是否有 解 .

例3.1 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

判断 β 是否可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出.若能 出，写出 β 的
一种 示方法.



3.2 n 维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \alpha$ 成立.



3.2 n 维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 成立.也
 是判断线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有 .



3.2 n 维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 成立. 也
 是判断线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有 .

构造以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta$ 为列的 阵, , 方程组的增广 阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 成立. 也
 是判断线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有 .

构造以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta$ 为列的 阵, , 方程组的增广 阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

对 阵 $\bar{A}$ 行初等行 换, 化其成 形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 成立. 也
 是判断线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有 .

构造以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta$ 为列的 阵, , 方程组的增广 阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

对 阵 $\bar{A}$ 行初等行 换, 化其成 形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



3.2 n维数组向量空

判断 是否能由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出, 是判定是
 否存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 成立. 也
 是判断线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有 .

构造以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta$ 为列的 阵, , 方程组的增广 阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

对 阵 $\bar{A}$ 行初等行 换, 化其成 形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -3 & 12 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等行换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 & 9 \\ 0 & 27 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad 5 \quad 1 \quad 2$$

→ $\begin{matrix} B \\ @ \end{matrix}$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc} & 0 & & & \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \rightarrow & \text{B} & & & \\ & @0 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & & 1 \\
 1 & 5 & 1 & 2 \\
 \rightarrow \begin{array}{c} B \\ @ \end{array} 0 & 3 & 1 & 1 \begin{array}{c} C \\ A \end{array} \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以 $\bar{A}$ 为增广 阵的线性方程组一定有 。



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \rightarrow & \text{B} & & & \text{C} \\ & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{A}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以 $\bar{A}$ 为增广 阵的线性方程组一定有 。

存在系数 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3 =$ 成立， 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出。



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \rightarrow & \textcircled{B} & 0 & 3 & 1 & \textcircled{C} & 1 & \textcircled{A} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以 $\bar{A}$ 为增广 阵的线性方程组一定有 。

存在系数 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3 =$ 成立， 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出。

对 形 阵 一 行初等行 换，化为规范 形



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \rightarrow & \text{B} & & & \text{C} \\ & @0 & 3 & 1 & 1\text{A} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以 $\bar{A}$ 为增广 阵的线性方程组一定有 .

存在系数 $x_1; x_2; x_3$, 使得 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3 =$ 成立, 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出.

对 形 阵 一 行初等行 换, 化为规范 形

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \text{B} & & & & \text{C} \\ @0 & 3 & 1 & 1\text{A} \rightarrow \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



3.2 n 维数组向量空

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \rightarrow & \text{B} & & & \text{C} \\ & @0 & 3 & 1 & 1\text{A} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

形 阵中的最后一列没有主元， 以以 $\bar{A}$ 为增广 阵的线性方程组一定有 。

存在系数 $x_1; x_2; x_3$ ，使得 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3 =$ 成立， 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出。

对 形 阵 一 行初等行 换，化为规范 形

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 1 & 5 & 1 & 2 \\ \text{B} & & & & \\ @0 & 3 & 1 & 1\text{A} & \rightarrow & \text{B} & & & \text{C} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & @0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & & & & & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\text{A} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



3.2

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_3, \text{ 其中 } x_3 \text{ 是自由变量}$$

知 .

$$\text{取 } x_3 = 1, \quad x_1 = 1$$



3.2 n 维数组向量空

对应的方程组有 :
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$
 , 其中 x_3 是自由未知量.

取 $x_3 = 1$, 则 $x_1 = 1; x_2 = 0$, 于是 $\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_3$.

注: 在有 的情形下, 形 阵的主元个数为2, 小于未知量个数3, 从而方程组有无穷多个, 因此 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出的方式有无穷多种.



3.2 n 维数组向量空

对应的方程组有 :
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$
 , 其中 x_3 是自由未知量.

取 $x_3 = 1$, 则 $x_1 = 1; x_2 = 0$, 于是 $\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_3$.

注: 在有 的情形下, 形 阵的主元个数为2, 小于未知量个数3, 从而方程组有无穷多个, 因此 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性 出的方式有无穷多种.

由于线性方程组未 都有 , 以在 n 维向量空 F^n 中, 未 可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出.



3.2 n 维数组向量空

问 是：给定的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 满足什么 征，任意
 的向量 都可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出？



3.2 n 维数组向量空

问 是：给定的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 满足什么 征，任意的向量 β 都可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出？而在可以 出时，需要满足什么 ， 可以使 示的方式唯一或者 唯一？



3.2 n 维数组向量空

问 是：给定的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 满足什么 征，任意的向量 β 都可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出？而在可以 出时，需要满足什么 ， 可以使 示的方式唯一或者 唯一？

F^n 中任意的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0 \alpha_1 + 0 \alpha_2 + \dots + 0 \alpha_m = 0;$$

，0向量可以由任意向量组线性 出.



3.2 n 维数组向量空

问 是：给定的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 满足什么 征，任意的向量 β 都可以由向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出？而在可以 出时，需要满足什么 ， 可以使 示的方式唯一或者 唯一？

F^n 中任意的向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0 \alpha_1 + 0 \alpha_2 + \dots + 0 \alpha_m = 0;$$

，0向量可以由任意向量组线性 出.自然的想法是：0向量给定向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ 线性 出时，系数是否一定要都取0？

这个问 是 论向量组属性的“分 岭”，是下一 的主要内容.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

