

线性代数

第 章：矩阵的等价、相似与合同

习 题 解 答

宿州学院 数学与统计学院



目录

① 习题5.1

② 习题5.2

③ 习题5.3

④ 习题5.4



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

第2行加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1列加到第2行,第1列乘(-3)加到第3列









习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘 $\frac{1}{4}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘 $\frac{1}{4}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘 $\frac{1}{4}$

第1列分别乘1,(-3),(-2) 加到第2,3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

矩阵的等价标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘 $\frac{1}{4}$

第1列分别乘1,(-3),(-2) 加到第2,3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘3, (-2)加到第2,3行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行分别乘3, (-2)加到第2,3行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第1行分别乘3, (-2)加到第2,3行} \\ \text{第2行乘}(-\frac{1}{12})}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5, (-9) 加到第3,4列

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘3, (-2)加到第2,3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第2行乘 $(-\frac{1}{12})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘(-1), (-4)加到第2,3行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行

第2行乘(-3)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-1), (-4)加到第2,3行

第2行乘(-3)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以矩阵的等价标准形是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.解 对矩阵A实施初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行

第2行乘(-3)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵A的秩 $r(A) = 2$.

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换,
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘 (-3) , (-4) 加到第2,3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换,
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行

第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行

第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘 $(-3), (-4)$ 加到第2,3行

第2行乘 (-1) 加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.

同阶矩阵 A, B 有相同的秩, 所以 A 与 B 等价.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3), (-4)加到第2, 3行

第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.

同阶矩阵 A, B 有相同的秩, 所以 A 与 B 等价.

3.解



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘 $(-3), (-4)$ 加到第2,3行

第2行乘 (-1) 加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.

同阶矩阵 A, B 有相同的秩, 所以 A 与 B 等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系, 且两个矩阵相似, 则它们一定等价; 两个矩阵合同, 则它们也一定等价;



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘 $(-3), (-4)$ 加到第2,3行

第2行乘 (-1) 加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.

同阶矩阵 A, B 有相同的秩, 所以 A 与 B 等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系, 且两个矩阵相似, 则它们一定等价; 两个矩阵合同, 则它们也一定等价; 矩阵等价是两个同阶矩阵之间的关系, 不一定是两个同阶方阵.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

对矩阵 B 实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘 $(-3), (-4)$ 加到第2,3行

第2行乘 (-1) 加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 B 的秩 $r(B) = 2$.

同阶矩阵 A, B 有相同的秩, 所以 A 与 B 等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系, 且两个矩阵相似, 则它们一定等价; 两个矩阵合同, 则它们也一定等价; 矩阵等价是两个同阶矩阵之间的关系, 不一定是两个同阶方阵. 即使是两个同阶方阵, 等价的矩阵也不一定相似或者合同.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\text{而 } BP = \begin{pmatrix} B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3 \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\begin{aligned} \text{而 } BP &= (B\eta_1 \quad B\eta_2 \quad B\eta_3), \quad PA = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (\eta_1 \quad 2\eta_2 \quad 3\eta_3), \quad \text{所以 } B\eta_1 = \eta_1, \quad B\eta_2 = 2\eta_2, \quad B\eta_3 = 3\eta_3. \\ \text{所以 } BP_1 &= B \begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\text{而 } BP = \begin{pmatrix} B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3 \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } B\eta_1 = \eta_1, B\eta_2 = 2\eta_2, B\eta_3 = 3\eta_3.$$

$$\text{所以 } BP_1 = B \begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\begin{aligned}
 \text{而 } BP &= (B\eta_1 \quad B\eta_2 \quad B\eta_3), \quad PA = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (\eta_1 \quad 2\eta_2 \quad 3\eta_3), \quad \text{所以 } B\eta_1 = \eta_1, \quad B\eta_2 = 2\eta_2, \quad B\eta_3 = 3\eta_3. \\
 \text{所以 } BP_1 &= B(\eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_1) = (B\eta_2 \quad B\eta_3 \quad B\eta_1) \\
 &= (2\eta_2 \quad 3\eta_3 \quad \eta_1)
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\begin{aligned}
 \text{而 } BP &= (B\eta_1 \quad B\eta_2 \quad B\eta_3), \quad PA = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (\eta_1 \quad 2\eta_2 \quad 3\eta_3), \text{ 所以 } B\eta_1 = \eta_1, B\eta_2 = 2\eta_2, B\eta_3 = 3\eta_3. \\
 \text{所以 } BP_1 &= B(\eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_1) = (B\eta_2 \quad B\eta_3 \quad B\eta_1) \\
 &= (2\eta_2 \quad 3\eta_3 \quad \eta_1) = (\eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\begin{aligned}
 \text{而 } BP &= (B\eta_1 \quad B\eta_2 \quad B\eta_3), \quad PA = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (\eta_1 \quad 2\eta_2 \quad 3\eta_3), \text{ 所以 } B\eta_1 = \eta_1, \quad B\eta_2 = 2\eta_2, \quad B\eta_3 = 3\eta_3. \\
 \text{所以 } BP_1 &= B(\eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_1) = (B\eta_2 \quad B\eta_3 \quad B\eta_1) \\
 &= (2\eta_2 \quad 3\eta_3 \quad \eta_1) = (\eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= P_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

4.解 因 $P^{-1}BP = A$, 所以 $BP = PA$.

$$\text{而 } BP = \begin{pmatrix} B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3 \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } B\eta_1 = \eta_1, B\eta_2 = 2\eta_2, B\eta_3 = 3\eta_3.$$

$$\text{所以 } BP_1 = B \begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\eta_2 & 3\eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$BP_2 = B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned}BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned} BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned} BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned} BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned}
 BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 BP_3 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned}
 BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 BP_3 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned}
 BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 BP_3 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & 2\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned}
 BP_2 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= P_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 BP_3 &= B \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_3 & 2\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1}BP_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{所以 } P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 6.$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 6.$$

5. 因 $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix},$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1}BP_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 6.$$

5. 因 $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 6.$$

$$\text{5.因 } P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 6.$

$$\begin{aligned} \text{5. 因 } P &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 6.$

5. 因 $P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$

$$= (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.

将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.

将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 λ A



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

(2) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

(2) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3.$









习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

将 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

将 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

将 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(5) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(5) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(5) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(6) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(6) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A|$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(6) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(6) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 11).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 11$.

将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

(6) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 11).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 11$.

将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_2 = 11$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 11$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -1$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -1$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(7) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -1$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 9$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 9$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 9$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 9$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 9$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 9$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

将 $\lambda_3 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 9$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 9$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

将 $\lambda_3 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

2.解





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

2.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

2.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

所以矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}.$$

2.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

所以矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

矩阵 A 相似于对角阵, 即可以对角化.





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

3.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$

 A 的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根,或者 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根.

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$

A 的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根,

或者 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根.

若 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根, 则 $a = -2$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$

A 的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当 $\lambda = 2$ 是
 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根,

或者 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根.

若 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根, 则 $a = -2$.这时, A 的
 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$;



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$

A 的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当 $\lambda = 2$ 是
 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根,

或者 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根.

若 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根, 则 $a = -2$.这时, A 的
 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$;

若 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根, 则 $a = -\frac{2}{3}$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)3.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18).$$

A 的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当 $\lambda = 2$ 是
 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根,

或者 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根.

若 $\lambda = 2$ 是 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 的根, 则 $a = -2$.这时, A 的
 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$;

若 $\lambda^2 - 8\lambda + 3a + 18 = 0$ 有重根, 则 $a = -\frac{2}{3}$.这时, A 的二重
 特征值 $\lambda_2 = 4$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵 A 的二重特征值有两个线性无关的特征向量, 而矩阵 A 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵 A 的二重特征值有两个线性无关的特征向量, 而矩阵 A 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$, 所以3阶方阵 A 有3个线性无关的特征向量, 所以 A 可以对角化.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵 A 的二重特征值有两个线性无关的特征向量, 而矩阵 A 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$, 所以3阶方阵 A 有3个线性无关的特征向量, 所以 A 可以对角化.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_2 = 4$, 将 $\lambda_2 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

当 $a = -2$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵 A 的二重特征值有两个线性无关的特征向量, 而矩阵 A 另一个特征值 $\lambda_2 = 6$, 所以3阶方阵 A 有3个线性无关的特征向量, 所以 A 可以对角化.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 矩阵 A 有二重特征值 $\lambda_2 = 4$, 将 $\lambda_2 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性无关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4.证明



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性无关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性无关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变 $\square$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性无关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5. 证明



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5.证明 因 A 可逆, 所以



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5. 证明 因 A 可逆, 所以 $A^{-1}(AB)A =$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5. 证明 因 A 可逆, 所以 $A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA =$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5. 证明 因 A 可逆, 所以 $A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

这时, 属于二重特征值 $\lambda_2 = 4$ 线性 关的特征向量只有1个, 所以 A 不能对角化.

即, $a = -\frac{2}{3}$ 时矩阵不能对角化.

4. 证明 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由于转置不改变行列式的值, 所以

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A|^T = |(\lambda I)^T - A^T| = |\lambda I - A^T|,$$

而矩阵 A^T 的特征多项式 $|\lambda I - A^T|$, 所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

矩阵的特征值 其特征多项式的根, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以有相同的特征值.

5. 证明 因 A 可逆, 所以 $A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA$, 所以 AB 与 BA 相似.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6. 证明 因 A_1 与 B_1 相似,
所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 T 可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 T 可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} T =$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 T 可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6. 证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 T 可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时,

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} T &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A_1P & 0 \\ 0 & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

6.证明 因 A_1 与 B_1 相似,

所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_1P = B_1$.

而 A_2 与 B_2 相似, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_2Q = B_2$.

构造分块矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 T 可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时,

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} T &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A_1P & 0 \\ 0 & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量, 所以存在数 λ , 使

得 $Ap = \lambda p$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量, 所以存在数 λ , 使

$$\text{得 } Ap = \lambda p. \text{ 所以 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量, 所以存在数 λ , 使

$$\text{得 } Ap = \lambda p. \text{ 所以 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 而}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量, 所以存在数 λ , 使

$$\text{得 } Ap = \lambda p. \text{ 所以 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 而}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

7.解 (1) 因 p 是矩阵 A 的一个特征向量, 所以存在数 λ , 使

$$\text{得 } Ap = \lambda p. \text{ 所以 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 而}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \text{ 所以 } \lambda = -1, a = -3, b = 0.$$





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

所以矩阵 A 有三重特征值 $\lambda_1 = -1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

所以矩阵 A 有三重特征值 $\lambda_1 = -1$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

所以矩阵 A 有三重特征值 $\lambda_1 = -1$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

所以矩阵 A 有三重特征值 $\lambda_1 = -1$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 不能对角化. 因 A 只有一个三重特征值, 且属于这个特征值线性 关的特征向量只有1个, 而 A 是3阶方阵,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = -3, b = 0$ 时, 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

所以矩阵 A 有三重特征值 $\lambda_1 = -1$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 不能对角化. 因 A 只有一个三重特征值, 且属于这个特征值线性无关的特征向量只有1个, 而 A 是3阶方阵, 所以 A 不能对角化.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$. 其中 $\lambda_1 = 6$ 是二重特征值.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$. 其中 $\lambda_1 = 6$ 是二重特征值.

由于矩阵 A 可以对角化, 所以属于二重特征值 $\lambda_1 = 6$ 有 2 个线性无关的特征向量.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$. 其中 $\lambda_1 = 6$ 是二重特征值.

由于矩阵 A 可以对角化, 所以属于二重特征值 $\lambda_1 = 6$ 有 2 个线性无关的特征向量.

将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$. 其中 $\lambda_1 = 6$ 是二重特征值.

由于矩阵 A 可以对角化, 所以属于二重特征值 $\lambda_1 = 6$ 有2个线性无关的特征向量.

将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 基础解系含2个解} \Leftrightarrow a = 0.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)(2) 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$. 其中 $\lambda_1 = 6$ 是二重特征值.

由于矩阵 A 可以对角化, 所以属于二重特征值 $\lambda_1 = 6$ 有2个线性无关的特征向量.

将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 基础解系含2个解} \Leftrightarrow a = 0.$$

所以矩阵 A 相似于对角阵 D , 则 $a = 0$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\text{得} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,
得
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\text{得 } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = -2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\text{得 } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = -2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\text{得 } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = -2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在 $a = 0$ 时, 将 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\text{得 } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = -2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$





习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 即 $A =$

$$P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 即 $A =$

$$P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 即 $A =$

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

8.解 (1)因 矩阵 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵.

又因 它们相应的特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所

以取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 即 $A =$

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 矩阵 A 有3个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 矩阵 A 有 3 个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵. 又因 特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 矩阵 A 有 3 个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵. 又因 特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 矩阵 A 有3个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵. 又因 特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 矩阵 A 有3个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵. 又因 特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{即 } A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 矩阵 A 有 3 个线性 关的特征向量, 所以 A 相似于对
角阵. 又因 特征向量分别 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{即 } A &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2013} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2013} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2012} \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2012} \end{pmatrix}$$

(3) 因 矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有特征值 $\lambda_1 = 0$, 又因

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2012} \end{pmatrix}$$

(3) 因 矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有特征值 $\lambda_1 = 0$, 又因

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$







习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正交.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正交. 设矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正

交. 设矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \text{属于 } \lambda_1 = 0 \text{ 的特征向量} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正

交. 设矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

则 $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, 属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正

交. 设矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \text{属于 } \lambda_1 = 0 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 A 是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正

交. 设矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

则 $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, 属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) =$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
特征值 $\lambda_1 = 1$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
以 $\det B = \det(P^{-1}AP)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
 特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
 以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$, 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = (\det P^{-1})(\det P)(\det A)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
 特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
 以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) =$
 $(\det P^{-1})(\det P)(\det A) = (\det P^{-1}P)(\det A)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
 特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
 以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) =$
 $(\det P^{-1})(\det P)(\det A) = (\det P^{-1}P)(\det A) = (\det I)(\det A)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
 特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
 以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) =$
 $(\det P^{-1})(\det P)(\det A) = (\det P^{-1}P)(\det A) = (\det I)(\det A) =$
 $\det A$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因 α_1, α_2 线性 关, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 而 $A\alpha_1 = 0$,
 所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$,
 所以 A 有非零特征值 $\lambda_1 = 1$, 且属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 特征向量
 $2\alpha_1 + \alpha_2$.

又因 A 是2阶矩阵, 且0是 A 的一个特征值, 所以 A 的非零
 特征值 $\lambda_1 = 1$.

10.证明 设 A, B 是相似矩阵, 则存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 又因 矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所
 以 $\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) =$
 $(\det P^{-1})(\det P)(\det A) = (\det P^{-1}P)(\det A) = (\det I)(\det A) =$
 $\det A$.

所以相似矩阵有相同的行列式.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\text{因 } \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以
 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以
 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以
 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.

(2)因 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.

(2)因 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵.而 A 的行列式 $|A| = 0$, 所以0是 A 的一个特征值,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\text{因 } \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \text{ 所以, 矩阵}$$

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1) 因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.

(2) 因 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵. 而 A 的行列式 $|A| = 0$, 所以 0 是 A 的一个特征值, 设 A 的两个非零特征值

分别 λ_1, λ_2 ,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

因 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 所以, 矩阵

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1)因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.

(2)因 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵.而 A 的行列式 $|A| = 0$, 所以0是 A 的一个特征值, 设 A 的两个非零特征值

分别 λ_1, λ_2 , 则 A 相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\text{因 } \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \text{ 所以, 矩阵}$$

A 相似于对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角阵, 则 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(1) 因 A 有3个不同特征值, 所以 A 相似于对角阵, 所以 $\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$, 所以 $\lambda = 4$.

(2) 因 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵. 而 A 的行列式 $|A| = 0$, 所以 0 是 A 的一个特征值, 设 A 的两个非零特征值

分别 λ_1, λ_2 , 则 A 相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 相似矩阵有相同的

秩, 所以 A 的秩 $r(A) = 2$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*)
$$\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*)
$$\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*)
$$\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关.

12. 解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11.因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关.

12.解 因 A 与 B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11.因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关.

12.解 因 A 与 B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 所以

$$P^{-1}(A - 2I)P =$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.

考虑组合 $x_1\alpha_1 + x_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0, (x_1 + \lambda_1x_2)\alpha_1 + \lambda_2x_2\alpha_2 = 0.$$

因 α_1, α_2 线性 关, 所以(*) $\begin{cases} x_1 + \lambda_1x_2 = 0 \\ \lambda_2x_2 = 0 \end{cases}$

若 $\lambda_2 \neq 0$, 则(*)只有零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性 关.

若 $\lambda_2 = 0$, 则(*)有非零解, 这时, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关.

12. 解 因 A 与 B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得
 $P^{-1}AP = B$. 所以

$$P^{-1}(A - 2I)P = P^{-1}AP - P^{-1}2IP$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

11. 因 α_1, α_2 是分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性 关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3,}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$P^{-1}(A - 2I)P =$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$P^{-1}(A - 2I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$P^{-1}(A - 2I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$\begin{aligned} P^{-1}(A - 2I)P &= P^{-1}AP - P^{-1}IP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$P^{-1}(A - 2I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于1,}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于3, 而相}$$

似矩阵有相同的秩, 所以 $A - 2I$ 的秩 3.

$$P^{-1}(A - 2I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 的秩等于1, 而相似矩阵有}$$

相同的秩, 所以 $A - I$ 的秩 1.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)13.(1)证明 因 $\alpha_{1,\eta}$ Tf

,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

$$\text{即 } x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1 ,



$O \alpha_1$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1 ,



$O \alpha_1$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 $\alpha_1,$



$O \alpha_1,$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

即 $x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

比较可得 $2x_1\alpha_1 + x_3\alpha_2 = 0$, 再由 α_1, α_2 线性 关,

则 $x_1 = x_3 = 0$, 从而 $x_2\alpha_2 = 0, x_2 = 0$.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 关.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

即 $x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

比较可得 $2x_1\alpha_1 + x_3\alpha_2 = 0$, 再由 α_1, α_2 线性 关,

则 $x_1 = x_3 = 0$, 从而 $x_2\alpha_2 = 0, x_2 = 0$.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 关.

(2)解 因 $AP = A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

即 $x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

比较可得 $2x_1\alpha_1 + x_3\alpha_2 = 0$, 再由 α_1, α_2 线性 关,

则 $x_1 = x_3 = 0$, 从而 $x_2\alpha_2 = 0, x_2 = 0$.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 关.

(2)解 因 $AP = A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ A\alpha_3)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

即 $x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

比较可得 $2x_1\alpha_1 + x_3\alpha_2 = 0$, 再由 α_1, α_2 线性 关,

则 $x_1 = x_3 = 0$, 从而 $x_2\alpha_2 = 0, x_2 = 0$.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 关.

(2)解 因 $AP = A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ A\alpha_3)$

$$= (-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3)$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因 α_1, α_2 是矩阵 A 分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性 关且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 由

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = 0,$$

即 $x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = -x_1\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

比较可得 $2x_1\alpha_1 + x_3\alpha_2 = 0$, 再由 α_1, α_2 线性 关,

则 $x_1 = x_3 = 0$, 从而 $x_2\alpha_2 = 0, x_2 = 0$.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 关.

(2)解 因 $AP = A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ A\alpha_3)$

$$= (-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

(1) $B\alpha_1$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$$

$$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$$

$$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$$

$$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\begin{aligned} (1) B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ &\alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1 \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$$

$$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3.$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) =$
 $A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2) = A^2(2^3\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) =$
 $A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2) = A^2(2^3\alpha_2) = 2^3A(A\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) =$
 $A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2) = A^2(2^3\alpha_2) = 2^3A(A\alpha_2) = 2^3A(2\alpha_2)$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以
 $A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$
 $A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \\ \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2.$
 $A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2) = A^2(2^3\alpha_2) = 2^3A(A\alpha_2) = 2^3A(2\alpha_2) = 2^4A\alpha_2$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 解 因 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 所以

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1,$$

$$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$$

$$(1) B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_1 = -2$ 的特征向量.

(2) 设 α_2, α_3 是矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则 $A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2) = 2^2A\alpha_2 = 2^3\alpha_2$.

$$A^5\alpha_2 = A^2(A^3\alpha_2) = A^2(2^3\alpha_2) = 2^3A(A\alpha_2) = 2^3A(2\alpha_2) = 2^4A\alpha_2 = 2^5\alpha_2.$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同上可以得到 $A^3\alpha_3 = (-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3 = (-2)^5\alpha_3$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同上可以得到 $A^3\alpha_3 = (-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3 = (-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_2 = (2^5 - 4 \times 2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2,$$

$$B\alpha_3 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_3 = ((-2)^5 - 4 \times (-2)^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同上可以得到 $A^3\alpha_3 = (-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3 = (-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_2 = (2^5 - 4 \times 2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2,$$

$$B\alpha_3 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_3 = ((-2)^5 - 4 \times (-2)^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3$$

即, α_2, α_3 是矩阵 B 属于特征值 $\gamma_2 = 1$ 的特征向量.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

同



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned}
 B &= P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以 $AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以
 $AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, \quad A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, \quad A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} 3a - 2 = \lambda(b + 3) \\ (3a - 2)b = \lambda(2b + 2) \\ 3a - 2 = \lambda(a + b + 1) \end{cases}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} 3a - 2 = \lambda(b + 3) \\ (3a - 2)b = \lambda(2b + 2) \\ 3a - 2 = \lambda(a + b + 1) \end{cases}$$

又因 A 可逆, 所以 $\lambda \neq 0$.



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

15.解 因 α 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量, 所以 $A^*\alpha = \lambda\alpha$. 而 $AA^* = |A|I$, 所以

$AA^*\alpha = A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha = \lambda(A\alpha)$. 又 $|A| = 3a - 2$,

$$|A|\alpha = \begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix}, A\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3a - 2 \\ (3a - 2)b \\ 3a - 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b + 3 \\ 2b + 2 \\ a + b + 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} 3a - 2 = \lambda(b + 3) \\ (3a - 2)b = \lambda(2b + 2) \\ 3a - 2 = \lambda(a + b + 1) \end{cases}$$

又因 A 可逆, 所以 $\lambda \neq 0$. 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$AP = A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

又因 X, AX, A^2X 线性 关, 所以 P 是可逆矩阵,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

又因 X, AX, A^2X 线性 关, 所以 P 是可逆矩阵, 所以

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} P^{-1},$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

又因 X, AX, A^2X 线性 关, 所以 P 是可逆矩阵, 所以

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 $A = PBP^{-1}$,



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\det(A + I) = \det(PBP^{-1} + PP^{-1})$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\det(A + I) = \det(PBP^{-1} + PP^{-1}) = \det[P(B + I)P^{-1}]$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A + I) &= \det(PBP^{-1} + PP^{-1}) = \det[P(B + I)P^{-1}] \\ &= \det P \det(B + I) \det P^{-1}\end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A + I) &= \det(PBP^{-1} + PP^{-1}) = \det[P(B + I)P^{-1}] \\ &= \det P \det(B + I) \det P^{-1} = \det(B + I)\end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A + I) &= \det(PBP^{-1} + PP^{-1}) = \det[P(B + I)P^{-1}] \\ &= \det P \det(B + I) \det P^{-1} = \det(B + I) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A + I) &= \det(PBP^{-1} + PP^{-1}) = \det[P(B + I)P^{-1}] \\ &= \det P \det(B + I) \det P^{-1} = \det(B + I) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2) 因 $A = PBP^{-1}$, 所以

$$\det(A + I) = \det \begin{pmatrix} PP^{-1} & PP^{-1} & T \\ A & I & Tf \\ T & Td & T \end{pmatrix}$$

7 0 Td [(1)]TJ/F26 10.9091 Tf 4.732 -3.959 Td [(\$)]TJ ET 1 0 0 1 156.737 [



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$





习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

将 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求

特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值 $\lambda_1 = 0$,

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, 所以它们已经是两两正交的.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求

特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值 $\lambda_1 = 0$,

$\lambda_2 = -$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求

特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值 $\lambda_1 = 0$,

$\lambda_2 = -$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求

特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值 $\lambda_1 = 0$,

$\lambda_2 = -$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单化} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{是任意不为 } 0 \text{的数} \right\}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 的两个正交的特征向量.}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 的两个正交的特征向量.}$$

再将其单位化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量正交化.

取 $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 是属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个正交的特征向量.

再将其单位化.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.

将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.

将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{是任意不为 } 0 \text{的数} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0 \right\}$$

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

所求特征值的特征向量就是正交的单 向量.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}) .$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$.将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$.将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)(4) 矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$.将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$





习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

将 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

因 A 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量是正交的.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

因 A 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量是正交的.
所求特征向量已是正交向量组.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

因 A 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量是正交的.
所求特征向量已是正交向量组.

只要对其单 化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ 的全部特征向量

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意不为 } 0 \text{ 的数} \right\}$$

因 A 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量是正交的.
所求特征向量已是正交向量组.

只要对其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 单 化 } \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 单 化 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 单 化 } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$,



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2)取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(3) 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(3)取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(3) 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) 取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(3) 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) 取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & - \\ & & & & & & \lambda \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & - \\ & & & & & & \lambda \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

43 0.39.2 T; Td 10.9091 Tf 8.7887Td 6



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性 关的特征向量正交化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 的两个正交的特征向量.}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 3 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 3 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 3 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q \text{ 是正交矩阵,}$$

$$\text{且 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$





习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2) 矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$

所以矩阵有特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$.

将 $\lambda_1 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 8$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 8$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 8$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 8$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.





习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 8$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 8$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$





习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将 $\lambda_2 = 8$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_2 = 8$ 的线性 关是特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是属于特征值 } \lambda_1 = -1 \text{ 的两个正交的特征向量.}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 8 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 8 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单 化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{属于特征值 } \lambda_2 = 8 \text{ 的特征向量 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{单 化} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q \text{ 是正交矩阵,}$$

$$\text{且 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

4.解



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)4.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - a & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)4.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - a & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

又因 A 与对角矩阵 D 相似, 所以 A 有特征值

$5, -4, b,$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)4.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - a & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

又因 A 与对角矩阵 D 相似, 所以 A 有特征值

$$5, -4, b, \text{ 即 } |-4I - A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -4 - a & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)4.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - a & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

又因 A 与对角矩阵 D 相似, 所以 A 有特征值

$$5, -4, b, \text{ 即 } |-4I - A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -4 - a & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

可得 $a = 4$.

在 $a = 4$ 时,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)4.解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - a & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

又因 A 与对角矩阵 D 相似, 所以 A 有特征值

$$5, -4, b, \text{ 即 } |-4I - A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -4 - a & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

可得 $a = 4$.

在 $a = 4$ 时,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4)$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.

将 $\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.

将 $\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.

将 $\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的线性 关是特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.

将 $\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的线性 关是特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 $\lambda_2 = -4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, 且 $\lambda_1 = 5$ 是二重的.
所以 $b = 5$.

将 $\lambda_1 = 5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的线性 关是特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 $\lambda_2 = -4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个线性 关的特征向量正交化.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

再单 化得属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个正交的单 特征向量

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$


习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

再单 化得属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的两个正交的单 特征向量

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

将属于特征值 $\lambda_2 = -4$ 的特征向量单 化得 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$



习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = D.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

1.解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

(2)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

(2)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

2.解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

(2)二次型的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

2.解 (1)二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$







习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

二次型的特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{其基}$$

基础解系.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的线性无关特征向量

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 $\lambda_2 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的线性 关是特征向量

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 $\lambda_2 = -1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的线性 关是特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的线性无关特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_3 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的线性无关特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_3 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的线性无关特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所求属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量已是正交向量,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所求属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量已是正交向量，只要单位化.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所求属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量已是正交向量, 只要单位化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单位化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{单位化} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所求属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量已是正交向量，只要单位化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单位化} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{单位化} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)属于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的特征向量单

化

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{ 则 可逆的线}$$

性变换, 且化原二次型 $y_1^2 - y_2^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{ 则 可逆的线}$$

性变换, 且化原二次型 $y_1^2 - y_2^2$.

$$(2) \text{二次型的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{ 则 可逆的线}$$

性变换, 且化原二次型 $y_1^2 - y_2^2$.

$$(2) \text{二次型的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{ 则 可逆的线}$$

性变换, 且化原二次型 $y_1^2 - y_2^2$.

$$(2) \text{二次型的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})^2(\lambda - 2)$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{ 则 可逆的线}$$

性变换, 且化原二次型 $y_1^2 - y_2^2$.

$$(2) \text{二次型的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})^2(\lambda - 2)$$

A 有两个特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$











习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单 化.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单 化. 取

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单 化. 取

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的特征值单 化得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单 化. 取

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的特征值单 化得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的特征向量正交化并单 化. 取

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的特征值单 化得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{令} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是可逆线性变}$$

换, 且化原二次型 $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是可逆线性变}$$

换, 且化原二次型 $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$.

$$(3) \text{ 二次型的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将 $\lambda_3 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将 $\lambda_3 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 线性 关的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_3 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_3 = 4$ 线性 关的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 单 化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 单位化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 单 化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换, 且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵 A 更改

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix})$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵 A 更改

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix})$$

解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵 A 更改

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{解 } A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{解 } A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \text{对 } A'A \text{ 进行初等行变换 } A'A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+a)^2 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其是可逆线性变换, 且化原二次型 $y_1^2 + 4y_2^2$.

3.(更正: 考虑到计算量, 将本题中的矩阵 A 更改

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{解 } A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \text{对 } A'A \text{ 进行初等行变换 } A'A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

由于 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 $\frac{1}{2}(1+a)^2 = 0$, $a = -1$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2)二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2) 二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2) 二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2) 二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2) 二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

将特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

(2) 二次型的矩阵 $A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

将特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值 $\lambda_3 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\lambda_2 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值 $\lambda_3 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 的线性无关的特征

向量单位化, 得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的线性无关的特征

向量单位化, 得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11 =



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 的线性无关的特征

向量单位化, 得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

取 $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 的线性无关的特征

向量单位化, 得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

取 $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{令} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$

$(\lambda - 2)[\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2)]$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$

$$(\lambda - 2)[\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2)]$$

A 有特征值 $\lambda_1 = 2$,

另 的特征值 $\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2) = 0$ 的根.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$

$$(\lambda - 2)[\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2)]$$

A 有特征值 $\lambda_1 = 2$,

另 的特征值 $\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2) = 0$ 的根.

(1)由于 A 的特征值之和 1, 特征值之积 -12,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

则其 正交变换, 且化原二次型 标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$

$$(\lambda - 2)[\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2)]$$

A 有特征值 $\lambda_1 = 2$,

另 的特征值 $\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2) = 0$ 的根.

(1)由于 A 的特征值之和 1, 特征值之积 -12, 而矩阵 A 已经有特征值 $\lambda_1 = 2$, 所以 $\lambda^2 + (2 - a)\lambda - (2a + b^2) = 0$ 的两个之和 -1, 两根之积 -6.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A|$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

将特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A|$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由 达定理, $\begin{cases} 2 - a = 1 \\ -(2a + b^2) = -6 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

(2) 在 $a = 1, b = 2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

将特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

(



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

特征值 $\lambda_2 = -3$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

(



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

特征值 $\lambda_2 = -3$ 的线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量已经是正交的, 只要单位化.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 单位化 } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 已经是单位向量.}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 则其是正交变换, 且

化原二次型 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A|$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

将特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $a = 1, b = -2$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

将特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$









习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值 $\lambda_2 = -3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

特征值 $\lambda_2 = -3$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的线性 关的特征向量已经是正交的, 只要单 化.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 单 化 } \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 已经是单 向量.}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

$$\text{取 } Q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取 $Q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, 则 Q_1 是正交矩阵, 且

$$Q_1^T A Q_1 = Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取 $Q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, 则 Q_1 是正交矩阵, 且

$$Q_1^T A Q_1 = Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 则其是正交变换,

且化原二次型 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 对 A 实施初

等行变换, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 对 A 实施初

等行变换, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

而 A 的秩 2, 所以 $a = 0$.





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 对 A 实施初

等行变换, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

而 A 的秩 2, 所以 $a = 0$.

(2) 在 $a = 0$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$$

有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 对 A 实施初

等行变换, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

而 A 的秩 2, 所以 $a = 0$.

(2) 在 $a = 0$ 时, 二次型的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$$

有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

将特征值 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量单位化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 线性 关的特征向量已经是正交的, 将其

单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量单 化 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 线性 关的特征向量已经是正交的, 将其

单 化 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

取 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当 $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当 $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当 $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当 $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 则其是正交变换, 且}$$

化原二次型 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当 $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}, \text{ 而 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$

6.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$

6.更正：将 α_1 更正 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$

6.更正：将 α_1 更正 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$

6.更正：将 α_1 更正 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解 因 A 的各行元素之和 3, 所以 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解集

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$

6.更正：将 α_1 更正 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解因 A 的各行元素之和 3, 所以 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, 即

A 有特征值 $\lambda_1 = 3$, 且属于 $\lambda_1 = 3$ 的线性 关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性 关,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性 关,
 α_1, α_2 是 A 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性 关,
 α_1, α_2 是 A 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量.

将特征值 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量单 化, 得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性无关,
 α_1, α_2 是 A 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性无关的特征向量.

将特征值 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量单位化, 得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性无关的特征向量正交化.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性 关,
 α_1, α_2 是 A 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量.

将特征值 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量单 化, 得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

又因 α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的解, 且线性 关,
 α_1, α_2 是 A 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量.

将特征值 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量单 化, 得 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

将属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的线性 关的特征向量正交化.

$$\text{取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

再单 化, 得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即, 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的正交单 向量

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即, 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的正交单 向量

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即, 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的正交单 向量

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ 是对角矩阵.}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即, 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的正交单 向量

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ 是对角矩阵.}$$

7.解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即, 属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的正交单 向量

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ 是对角矩阵.}$$

7.解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.

注意到特征值 a , $a + 1$, $a - 2$, 则 $a = 2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.

注意到特征值 a , $a + 1$, $a - 2$, 则 $a = 2$.

本题说明:



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.

注意到特征值 a , $a + 1$, $a - 2$, 则 $a = 2$.

本题说明: 二次型的标准形不 一.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.

注意到特征值 a , $a + 1$, $a - 2$, 则 $a = 2$.

本题说明: 二次型的标准形不 一. 也就是说, 不同的可逆线性变换, 会化同一个二次型 不同的标准形.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a - 1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)$$

有特征值 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 1$, $\lambda_3 = a - 2$.

(2) 由于二次型的标准形 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值中有两个正的, 一个 0.

注意到特征值 a , $a + 1$, $a - 2$, 则 $a = 2$.

本题说明: 二次型的标准形不一. 也就是说, 不同的可逆线性变换, 会化同一个二次型 不同的标准形.

如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 之下, 化 $y_1^2 + y_2^2$;



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{之下, 化} \quad 4y_2^2 + y_3^2;$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下, 化 $4y_2^2 + y_3^2$;

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化} \quad 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化 } 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$, 则系数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中, 正数、负数、0的个数是由二次型一确定的, 与可逆的线性变换无关.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化 } 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$, 则系数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中, 正数、负数、0 的个数是由二次型一确定的, 与可逆的线性变换无关.

至于哪一项的系数正、负、或者 0,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化 } 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$, 则系数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中, 正数、负数、0 的个数是由二次型一确定的, 与可逆的线性变换关.

至于哪一项的系数正、负、或者 0, 正的系数是正数几, 负的系数是系数几, 这些是由可逆的线性变换确定的.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化 } 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$, 则系数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中, 正数、负数、0 的个数是由二次型 一确定的, 与可逆的线性变换 关.

至于哪一项的系数 正、 负、或者 0, 正的系数是正数几, 负的系数是系数几, 这些是由可逆的线性变换确定的.

在上一个例子中, 二次型本身确定了它的标准形的系数一定是两个正的, 一个 0, 没有负的系数.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$\text{在} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{之下, 化 } 4y_2^2 + y_3^2;$$

但标准形中, 正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即, 任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经可逆的线性变换 $X = CY$, 化了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$, 则系数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中, 正数、负数、0 的个数是由二次型 一确定的, 与可逆的线性变换 关.

至于哪一项的系数 正、 负、或者 0, 正的系数是正数几, 负的系数是系数几, 这些是由可逆的线性变换确定的.

在上一个例子中, 二次型本身确定了它的标准形的系数一定是两个正的, 一个 0, 没有负的系数. 至于系数是正数几, 哪一项的系数是正的, 这是由可逆的线性变换所确定的.





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 2)^2(\lambda - a - 4)$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 2)^2(\lambda - a - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = a - 2$ (二重), $\lambda_2 = a + 4$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 2)^2(\lambda - a - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = a - 2$ (二重), $\lambda_2 = a + 4$.

又因 正交变换 $X = PY$ 化二次型 $6y_1^2$, 所以

$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即, A 有特征值 6 和二重特征值 0,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 2)^2(\lambda - a - 4)$$

有特征值 $\lambda_1 = a - 2$ (二重), $\lambda_2 = a + 4$.

又因 正交变换 $X = PY$ 化二次型 $6y_1^2$, 所以

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即, } A \text{ 有特征值 } 6 \text{ 和二重特征}$$

值0, 所以 $a = 2$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1) 证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| =$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明





习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2)解



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2)解 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2)解 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 它们有相同特征多项式 λ^2 , 但 A, B 的秩不相同, 不可能相似.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2)解 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 它们有相同特征多项式 λ^2 , 但 A, B 的秩不相同, 不可能相似.

(3)证明



(3) 证明 设 A, B 是实对称矩阵, 且有相同的特征多项式,

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1) 证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2) 解 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 它们有相同特征多项式 λ^2 , 但 A, B 的秩不相同, 不可能相似.

(3) 证明 设 A, B 是实对称矩阵, 且有相同的特征多项式, 则 A, B 有相同的特征值, 设 $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$.



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1) 证明 因 A, B 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$\text{所以 } |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|$$

所以, 它们有相同的特征多项式.

(2) 解 如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 它们有相同特征多项式 λ^2 , 但 A, B 的秩不相同, 不可能相似.

(3) 证明 设 A, B 是实对称矩阵, 且有相同的特征多项式, 则 A, B 有相同的特征值, 设 $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$.

由于 A, B 是实对称矩阵, 所以存在可逆矩阵 P, Q , 使得



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$



习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即 A, B 相似于同一个对角阵, 所以 A 与 B 相似.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

