

线性代数

1 三章：向量空间

习 题 解 答

宿州学院 数学与统计学院



目录

1 习题3.4



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)**1.解**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) - (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + (-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解

$$\begin{aligned}1 &= 3(2_1 + 2_2 - 5_3) - (1_1 + 3_2 + 3_3) + (-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 4_1 + 4_2 - 17_3;\end{aligned}$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解

$$1 = 3(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}) - (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + (-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 17 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$2 = (2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}) + 2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + 4(-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$









习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解

$$\begin{aligned}1 &= 3(2_1 + 2_2 - 5_3) - (1_1 + 3_2 + 3_3) + (-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 4_1 + 4_2 - 17_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 &= (2_1 + 2_2 - 5_3) + 2(1_1 + 3_2 + 3_3) + 4(-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 0_1 + 23_2 - 7_3;\end{aligned}$$

2.解 因

$$1_1 + 2_2 = 2_1, \text{ 所以 } 1_1 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_2;$$

$$2_1 + 3_3 = 2_2, \text{ 所以 } 2_2 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3;$$

$$1_1 + 3_3 = 2_3, \text{ 所以 } 3_3 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3.$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解

$$\begin{aligned}1 &= 3(2_1 + 2_2 - 5_3) - (1_1 + 3_2 + 3_3) + (-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 4_1 + 4_2 - 17_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 &= (2_1 + 2_2 - 5_3) + 2(1_1 + 3_2 + 3_3) + 4(-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 0_1 + 23_2 - 7_3;\end{aligned}$$

2.解 因

$$1_1 + 2_2 = 2_1, \text{ 所以 } 1_1 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_2;$$

$$2_1 + 3_3 = 2_2, \text{ 所以 } 2_2 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3;$$

$$1_1 + 3_3 = 2_3, \text{ 所以 } 3_3 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3.$$

3.解 题知 $1'_1, 2'_2, 3'_3, 4'$ 可以由 $1_1, 2_2, 3_3, 4$ 线性表出, 且

$$1_1 + 2_2 + 3_3 + 4 = 3(1_1 + 2_2 + 3_3 + 4);$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

1.解

$$\begin{aligned}1 &= 3(2_1 + 2_2 - 5_3) - (1_1 + 3_2 + 3_3) + (-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 4_1 + 4_2 - 17_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 &= (2_1 + 2_2 - 5_3) + 2(1_1 + 3_2 + 3_3) + 4(-1_1 + 4_2 - 3_3) \\&= 0_1 + 23_2 - 7_3;\end{aligned}$$

2.解 因

$$1_1 + 2_2 = 2_1, \text{ 所以 } 1_1 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_2;$$

$$2_1 + 3_3 = 2_2, \text{ 所以 } 2_2 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3;$$

$$1_1 + 3_3 = 2_3, \text{ 所以 } 3_3 = \frac{1}{2}_1 + \frac{1}{2}_3.$$

3.解 题知 $1'_1, 2'_2, 3'_3, 4'$ 可以由 $1'_1, 2'_2, 3'_3, 4'$ 线性表出, 且

$$1'_1 + 2'_2 + 3'_3 + 4' = 3(1_1 + 2_2 + 3_3 + 4);$$

$$1'_1 + 2'_2 + 3'_3 + 4' = \frac{1}{3}(1_1 + 2_2 + 3_3 + 4)$$

进而



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\mathbf{1} = \frac{1}{3}(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4}) - \mathbf{1} = -\frac{2}{3}\mathbf{1} + \frac{1}{3}\mathbf{2} + \frac{1}{3}\mathbf{3} + \frac{1}{3}\mathbf{4};$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4; \\2 &= \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2\end{aligned}$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4; \\2 &= \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3}1 - \frac{2}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4;\end{aligned}$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3}1 - \frac{2}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 - \frac{2}{3}3 + \frac{1}{3}4;$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} 1 - \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 - \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} 1 - \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 - \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 - \frac{2}{3} 4;$$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} 1 - \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 - \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 - \frac{2}{3} 4;$$

即 $1; 2; 3; 4$ 可以由线性表出 $1; 2; 3; 4$, 所以它们

价.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\mathbf{1} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - \mathbf{1} = -\frac{2}{3} \mathbf{1} + \frac{1}{3} \mathbf{2} + \frac{1}{3} \mathbf{3} + \frac{1}{3} \mathbf{4};$$

$$\mathbf{2} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - \mathbf{2} = \frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{3} \mathbf{2} + \frac{1}{3} \mathbf{3} + \frac{1}{3} \mathbf{4};$$

$$\mathbf{3} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - \mathbf{3} = \frac{1}{3} \mathbf{1} + \frac{1}{3} \mathbf{2} - \frac{2}{3} \mathbf{3} + \frac{1}{3} \mathbf{4};$$

$$\mathbf{4} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - \mathbf{4} = \frac{1}{3} \mathbf{1} + \frac{1}{3} \mathbf{2} + \frac{1}{3} \mathbf{3} - \frac{2}{3} \mathbf{4};$$

即 $\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}$ 可以由线性表出 $\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}$, 所以它们

价.

4. 解 先考虑向量组 $\mathbf{1} - \mathbf{2}; \mathbf{2} - \mathbf{3}; \mathbf{3} - \mathbf{1}$ 线性相 性.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 4;$$

即 $1; 2; 3; 4$ 可以由线性表出 $1; 2; 3; 4$, 所以它们

价.

4. 解 先考虑向量组 $1 - 2; 2 - 3; 3 - 1$ 线性相 性.

因 $(1 - 2) + (2 - 3) + (3 - 1) = 0$,

所以 $1 - 2; 2 - 3; 3 - 1$ 线性相 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3} 1 - \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 - \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 4;$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4 = \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 3 - \frac{2}{3} 4;$$

即 $1; 2; 3; 4$ 可以由线性表出 $1; 2; 3; 4$, 所以它们

价.

4. 解 先考虑向量组 $1 - 2; 2 - 3; 3 - 1$ 线性相 性.

因 $(1 - 2) + (2 - 3) + (3 - 1) = 0$,

所以 $1 - 2; 2 - 3; 3 - 1$ 线性相 .

再讨论 $1 - 2; 2 - 3$ 线性相 性,

考虑组 $x_1(1 - 2) + x_2(2 - 3) = 0$,

即 $x_1 1 + (-x_1 + x_2) 2 + (-x_2) 3 = 0$,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4;$$

$$2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 2 = \frac{1}{3}1 - \frac{2}{3}2 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}4;$$

$$3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 3 = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 - \frac{2}{3}3 + \frac{1}{3}4.$$

$$4 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4) - 4 = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 - \frac{2}{3}4$$

即 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 可以由线性表出 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 所以它们

价.

1



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - 2 : 2 - 3 \text{ 线性}$$

,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{1-2: } 2-3 \text{ 线性}$$

，所以 1-2: 2-3 其极大相性 组.

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{1-2: } 2 - 3 \text{ 线性}$$

, 所以 1-2: 2-3 其极大相性 组.

5.解

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix} \text{线性}$$

, 所以 $\begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix}$ 其极大相性 组.

5. 解 先考虑向量组 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ 线性相 性.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix} \text{线性}$$

, 所以 $\begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix}$ 其极大相性 组.

5. 解 先考虑向量组 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}$ 线性相 性. 考虑组

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix} \text{线性}$$

, 所以 $\begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix}$ 其极大相性 组.

5. 解 先考虑向量组 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}$ 线性相 性. 考虑组

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ 线性相 , 所以存在不全 零 数 $k_1; k_2; k_3$,

使 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ 成立.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix} \text{线性}$$

, 所以 $\begin{matrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & 3 \end{matrix}$ 其极大相性 组.

5. 解 先考虑向量组 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}$ 线性相 性. 考虑组

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ 线性相 , 所以存在不全 零 数 $k_1; k_2; k_3$,

使 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ 成立.

取 $x_1 = k_1; x_2 = \frac{1}{2}k_2; x_3 = \frac{1}{3}k_3$, 则 $x_1; x_2; x_3$ 不全 零,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{1-2; 2-3线性}$$

, 所以 1-2; 2-3 其极大相性 组.

5. 解 先考虑向量组 1; 2; 3 线性相 性. 考虑组

$$x_1(1) + x_2(2) + x_3(3) = 0,$$

由于 1; 2; 3 线性相 , 所以存在不全 零 数 $k_1; k_2; k_3$,

使 $k_1(1) + k_2(2) + k_3(3) = 0$ 成立.

取 $x_1 = k_1; x_2 = \frac{1}{2}k_2; x_3 = \frac{1}{3}k_3$, 则 $x_1; x_2; x_3$ 不全 零, 且

$$x_1(1) + x_2(2) + x_3(3) =$$

$$k_1(1) + (\frac{1}{2}k_2)(2) + (\frac{1}{3}k_3)(3) = k_1(1) + k_2(2) + k_3(3) = 0.$$

所以 1; 2; 3 线性相 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

再考虑 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性相 性.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

再考虑 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性相 性. 考虑

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 , 所以

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

线性相 性.考虑

$$(x_1)_1 + (2x_2)_2 = 0,$$

线性



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

线性相 性.考虑

$$(x_1)_1 + (2x_2)_2 = 0,$$

线性



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

线性相 性.考虑

$$(x_1)_1 + (2x_2)_2 = 0,$$

线性



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

再考虑 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性相 性. 考虑

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 , 所以

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 .

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 极大线性 组.

6.解



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

再考虑 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性相 性. 考虑

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 , 所以

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 .

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 极大线性 组.

6. 解 因 ; ; 线性 , 所以它 部分组 ; 也线性 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

再考虑 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性相 性. 考虑

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 , 所以

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 线性 .

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 极大线性 组.

6. 解 因 ; ; 线性 , 所以它 部分组 ; 也线性 .

而已知 ; ; 线性相 , 所以 ; 是向量组 ; ; 极大线性 组.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

由于极大线性组与向量组自身 价,

所以 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 $1, 2, \dots, s$ 线性表出;

$1, 2, \dots, t$ 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

由于极大线性组与向量组自身 价,

所以 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 $1, 2, \dots, s$ 线性表出;

$1, 2, \dots, t$ 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

而已知 $1, 2, \dots, s$ 可以由 $1, 2, \dots, t$ 线性表出, 再由向量组线性表出 传4性,

则有 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

由于极大线性组与向量组自身 价,

所以 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 $1, 2, \dots, s$ 线性表出;

$1, 2, \dots, t$ 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

而已知 $1, 2, \dots, s$ 可以由 $1, 2, \dots, t$ 线性表出, 再由向量组线性表出 传4性,

则有 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

又因 i_1, i_2, \dots, i_m 线性, 所以 $m \leq n$.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

由于极大线性组与向量组自身 价,

所以 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 $1, 2, \dots, s$ 线性表出;

$1, 2, \dots, t$ 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

而已知 $1, 2, \dots, s$ 可以由 $1, 2, \dots, t$ 线性表出, 再由向量组线性表出 传4性,

则有 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

又因 i_1, i_2, \dots, i_m 线性 , 所以 $m \leq n$.

而 m 向量组 $1, 2, \dots, s$ 秩,

n 向量组 $1, 2, \dots, t$ 秩,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

7. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_m 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_n 是向量组 $1, 2, \dots, t$ 是一个极大线性组.

由于极大线性组与向量组自身 价,

所以 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 $1, 2, \dots, s$ 线性表出;

$1, 2, \dots, t$ 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

而已知 $1, 2, \dots, s$ 可以由 $1, 2, \dots, t$ 线性表出, 再由向量组线性表出 传4性,

则有 i_1, i_2, \dots, i_m 可以由 j_1, j_2, \dots, j_n 线性表出.

又因 i_1, i_2, \dots, i_m 线性 , 所以 $m \leq n$.

而 m 向量组 $1, 2, \dots, s$ 秩,

n 向量组 $1, 2, \dots, t$ 秩,

所以 $1, 2, \dots, s$ 秩 $\leq 1, 2, \dots, t$ 秩.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 $i_1 : i_2 : \dots : i_{r_1}$ 是向量组 $1 : 2 : \dots : s$ 是一个极大线性组, $j_1 : j_2 : \dots : j_{r_2}$ 是向量组 $1 : 2 : \dots : s$ 是一个极大线性组.

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 $i_1; i_2; \dots; i_{r_1}$ 是向量组 $1; 2; \dots; s$ 是一个极大线性组， $j_1; j_2; \dots; j_{r_2}$ 是向量组 $1; 2; \dots; s$ 是一个极大线性组。由于极大线性组与向量组自身相等，所以 $1; 2; \dots; s$ 可以由 $i_1; i_2; \dots; i_{r_1}$ 线性表出； $1; 2; \dots; s$ 可以由线性表出 $j_1; j_2; \dots; j_{r_2}$ 。

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 $i_1 : i_2 : \dots : i_{r_1}$ 是向量组 $1 : 2 : \dots : s$ 是一个极大线性组, $j_1 : j_2 : \dots : j_{r_2}$ 是向量组 $1 : 2 : \dots : s$ 是一个极大线性组. 由于极大线性组与向量组自身等价, 所以 $1 : 2 : \dots : s$ 可以由 $i_1 : i_2 : \dots : i_{r_1}$ 线性表出; $1 : 2 : \dots : s$ 可以由线性表出 $j_1 : j_2 : \dots : j_{r_2}$.

从而向量组

$1 : \dots : s : 1 : \dots : s$ 可以由 $i_1 : \dots : i_{r_1} : j_1 : \dots : j_{r_2}$ 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_{r_2} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组. 由于极大线性组与向量组自身等价, 所以 $1, 2, \dots, s$ 可以由 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 线性表出; $1, 2, \dots, s$ 可以由线性表出 j_1, j_2, \dots, j_{r_2} .

从而向量组

$1, \dots, s$ 又因 $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出. 利用线性表出的传递性, $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组， j_1, j_2, \dots, j_{r_2} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组。由于极大线性组与向量组自身等价，所以 $1, 2, \dots, s$ 可以由 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 线性表出； $1, 2, \dots, s$ 可以由线性表出 j_1, j_2, \dots, j_{r_2} 。

从而向量组

$1, \dots, s$ 又因 $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出。利用线性表出的传递性， $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出。而 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 秩不超过其向量个数 $r_1 + r_2$ ，

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_{r_2} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组. 由于极大线性组与向量组自身等价, 所以 $1, 2, \dots, s$ 可以由 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 线性表出; $1, 2, \dots, s$ 可以由线性表出 j_1, j_2, \dots, j_{r_2} .

从而向量组

$1, \dots, s$ 又因 $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出. 利用线性表出的传递性, $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出. 而 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 秩不超过其向量个数 $r_1 + r_2$, 再由 Ex_7 结论, $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 秩 $\leq i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 秩,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

8. 证明 设 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组, j_1, j_2, \dots, j_{r_2} 是向量组 $1, 2, \dots, s$ 是一个极大线性组. 由于极大线性组与向量组自身等价, 所以 $1, 2, \dots, s$ 可以由 i_1, i_2, \dots, i_{r_1} 线性表出; $1, 2, \dots, s$ 可以由线性表出 j_1, j_2, \dots, j_{r_2} .

从而向量组

$1, \dots, s$ 又因 $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出. 利用线性表出的传递性, $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 可以由 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 线性表出. 而 $i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 秩不超过其向量个数 $r_1 + r_2$, 再由 Ex_7 结论, $1 + 1, 2 + 2, \dots, s + s$ 秩 $\leq i_1, \dots, i_{r_1}, j_1, \dots, j_{r_2}$ 秩, 即 $r_3 \leq r_1 + r_2$.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n$ 线性表出, 取 n 范单 向量组 v_1, v_2, \dots, v_n , 则 v_1, v_2, \dots, v_n 可以由 v_1, v_2, \dots, v_n 线性表出;



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 取 n 范单 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出; 而任意一个 n 向量 N 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 等价,

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 取 n 范单 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出; 而任意一个 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 价, 价向量组有相同 秩, 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 .

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 取 n 范单 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出; 而任意一个 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 价, 价向量组有相同 秩, 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 .
必要性.

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性表出，取 n 范单 向量组 " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ "，则 " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ " 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性表出；而任意一个 n 向量 \tilde{N} 可以由 " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ " 线性表出，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ " 价， 价向量组有相同 秩，而 " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ " 秩 n ，

所以 $1 \leq i \leq n$ 秩 n , $1 \leq i \leq n$ 线性 .

必要性.假设 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}$ 线性相关, 任取一个 n 向量, 则 $n+1$ 个 n 向量 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}, \mathbf{x}$ 线性相关.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 取 n 范单 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出; 而任意一个 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 价, 价向量组有相同 秩, 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 .

必要性. 假设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 , 任取一个 n 向量 , 则 $n+1$ 个 n 向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性相 . 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 , 所以 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

9. 证明 先证明充分性.

假设任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出，取 n 范单 向量组 " 1 ; " 2 ; \vdots ; " n "，则 " 1 ; " 2 ; \vdots ; " n " 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出；而任意一个 n 向量 \tilde{N} 可以由 " 1 ; " 2 ; \vdots ; " n " 线性表出，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 与 " 1 ; " 2 ; \vdots ; " n " 价，价向量组有相同 秩，而 " 1 ; " 2 ; \vdots ; " n " 秩 n ，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 秩 n ， $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 .

必要性.假设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 ，任取一个 n 向量，则 $n+1$ 个 n 向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性相 . 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性 ，所以 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出.

即，任一 n 向量 \tilde{N} 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由其 r 个向量号
成 部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明
 i_1, i_2, \dots, i_r 线性 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.

由于 i_1, i_2, \dots, i_s 秩 r , 所以其存在 r 向量 极大线性组, 设 j_1, j_2, \dots, j_r .

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.

由于 i_1, i_2, \dots, i_s 秩 r , 所以其存在 r 向量 极大线性组, 设 j_1, j_2, \dots, j_r .

则 j_1, j_2, \dots, j_r 可以由 i_1, i_2, \dots, i_s 线性表出, 从而可以由 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.

由于 i_1, i_2, \dots, i_s 秩 r , 所以其存在 r 向量 极大线性组, 设 j_1, j_2, \dots, j_r .

则 j_1, j_2, \dots, j_r 可以由 i_1, i_2, \dots, i_s 线性表出, 从而可以由 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出. 且 i_1, i_2, \dots, i_r 中 每一个向量 \tilde{N} 可以由 j_1, j_2, \dots, j_r 线性表出,

所以 i_1, i_2, \dots, i_r 与 j_1, j_2, \dots, j_r 等价,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.

由于 i_1, i_2, \dots, i_s 秩 r , 所以其存在 r 向量 极大线性组, 设 j_1, j_2, \dots, j_r .

则 j_1, j_2, \dots, j_r 可以由 i_1, i_2, \dots, i_s 线性表出, 从而可以由 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出. 且 i_1, i_2, \dots, i_r 中 每一个向量 \tilde{N} 可以由 j_1, j_2, \dots, j_r 线性表出,

所以 i_1, i_2, \dots, i_r 与 j_1, j_2, \dots, j_r 价, 价向量组有相同 秩, 所以 i_1, i_2, \dots, i_r 秩 r ,

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

10. 证明 设秩 r 向量组 i_1, i_2, \dots, i_s 可以由其 r 个向量号成 部分组 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出.

要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 是其极大线性组, 只要证明 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.

由于 i_1, i_2, \dots, i_s 秩 r , 所以其存在 r 向量 极大线性组, 设 j_1, j_2, \dots, j_r .

则 j_1, j_2, \dots, j_r 可以由 i_1, i_2, \dots, i_s 线性表出, 从而可以由 i_1, i_2, \dots, i_r 线性表出. 且 i_1, i_2, \dots, i_r 中 每一个向量 \tilde{N} 可以由 j_1, j_2, \dots, j_r 线性表出,

所以 i_1, i_2, \dots, i_r 与 j_1, j_2, \dots, j_r 价, 价向量组有相同 秩, 所以 i_1, i_2, \dots, i_r 秩 r , 所以 i_1, i_2, \dots, i_r 线性.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设(I')是向量组(I) 极大线性 组, (II')是向量组(II) 极大线性 组.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设(I')是向量组(I) 极大线性 线性组，(II')是向量组(II) 极大线性 线性组. 由于向量组(I)与(II)有相同 秩，且(I)可以由(II)表出，所以向量组(I')可以由向量组(II')线性表出且它们有相同 向量个数，并设个数 t .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设 (I') 是向量组 (I) 极大线性 线性组， (II') 是向量组 (II) 极大线性 线性组. 由于向量组 (I) 与 (II) 有相同 秩，且 (I) 可以由 (II) 表出，所以向量组 (I') 可以由向量组 (II') 线性表出且它们有相同 向量个数，并设个数 t .

任取 (II') 一个向量，由于 (I') 可以由 (II') 线性表出且 是 (II') 中 向量，所以由 (I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量组可以由 t 个向量 向量组 (II') 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设(I')是向量组(I) 极大线性 组, (II')是向量组(II) 极大线性 组. 由于向量组(I)与(II)有相同 秩, 且(I)可以由(II)表出, 所以向量组(I')可以由向量组(II')线性表出 且它们有相同 向量个数, 并设个数 t .

任取(II') 一个向量 , 由于(I')可以由(II')线性表出 且 是(II')中 向量, 所以由(I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量 组可以由 t 个向量 向量组(II')线性表出. 所以由(I') 号成 向量组线性相 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设 (I') 是向量组 (I) 极大线性 线性组， (II') 是向量组 (II) 极大线性 线性组.由于向量组 (I) 与 (II) 有相同 秩，且 (I) 可以由 (II) 表出，所以向量组 (I') 可以由向量组 (II') 线性表出且它们有相同 向量个数，并设个数 t .

任取 (II') 一个向量，由于 (I') 可以由 (II') 线性表出且 是 (II') 中 向量，所以由 (I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量组可以由 t 个向量 向量组 (II') 线性表出.所以由 (I') 号成向量组线性相 .

而 (I') 线性 ，所以 可以由 (I') 线性表出，



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设 (I') 是向量组 (I) 极大线性 组， (II') 是向量组 (II) 极大线性 组.由于向量组 (I) 与 (II) 有相同 秩，且 (I) 可以由 (II) 表出，所以向量组 (I') 可以由向量组 (II') 线性表出且它们有相同 向量个数，并设个数 t .

任取 (II') 一个向量，由于 (I') 可以由 (II') 线性表出且 是 (II') 中 向量，所以由 (I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量组可以由 t 个向量 向量组 (II') 线性表出.所以由 (I') 号成向量组线性相 .

而 (I') 线性 ，所以 可以由 (I') 线性表出，注意在 (II') 中 任意性，则 (II') 可以由 (I') 线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设 (I') 是向量组 (I) 极大线性 组， (II') 是向量组 (II) 极大线性 组.由于向量组 (I) 与 (II) 有相同 秩，且 (I) 可以由 (II) 表出，所以向量组 (I') 可以由向量组 (II') 线性表出且它们有相同 向量个数，并设个数 t .

任取 (II') 一个向量，由于 (I') 可以由 (II') 线性表出且 是 (II') 中 向量，所以由 (I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量组可以由 t 个向量 向量组 (II') 线性表出.所以由 (I') 号成向量组线性相 .

而 (I') 线性 ，所以 可以由 (I') 线性表出，注意在 (II') 中 任意性，则 (II') 可以由 (I') 线性表出.
所以 (I') 与 (II') 价.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设(I')是向量组(I) 极大线性 组, (II')是向量组(II) 极大线性 组. 由于向量组(I)与(II)有相同 秩, 且(I)可以由(II)表出, 所以向量组(I')可以由向量组(II')线性表出且它们有相同 向量个数, 并设个数 t .

任取(II') 一个向量 , 由于(I')可以由(II')线性表出且 是(II')中 向量, 所以由(I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量组可以由 t 个向量 向量组(II')线性表出. 所以由(I') 号成向量组线性相 .

而(I')线性 , 所以 可以由(I')线性表出, 注意在(II')中 任意性, 则(II')可以由(I')线性表出.

所以(I')与(II') 价.

利用 价 传4性, (I) 价于(I'), (I') 价于(II'), (II') 价于(II),

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

11. 证明 设(I')是向量组(I) 极大线性 组, (II')是向量组(II) 极大线性 组. 由于向量组(I)与(II)有相同 秩, 且(I)可以由(II)表出, 所以向量组(I')可以由向量组(II')线性表出 且它们有相同 向量个数, 并设个数 t .

任取(II') 一个向量 , 由于(I')可以由(II')线性表出 且 是(II')中 向量, 所以由(I') 号成 $t + 1$ 个向量 向量 组可以由 t 个向量 向量组(II')线性表出. 所以由(I') 号成 向量组线性相 .

而(I')线性 , 所以 可以由(I')线性表出, 注意

在(II')中 任意性, 则(II')可以由(I')线性表出.

所以(I')与(II') 价.

利用 价 传递性, (I) 价于(I'), (I') 价于(II'), (II') 价 于(II), 所以(I) 价于(II).



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明 因 $\text{rank(I)} = \text{rank(II)} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性 ,
且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性相 .



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明 因 $\text{rank(I)} = \text{rank(II)} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性 ,
且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性相 . 所以 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性表出, 即
存在系数 $k_1; k_2; k_3$, 使 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.



□

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明 因 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II) = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性 ,
 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性相 . 所以 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性表出, 即
 存在系数 k_1, k_2, k_3 , 使 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

要证 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 秩 4, 只要证明

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 线性 .

考虑组 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 (\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}) = 0$,
 即 $(x_1 - k_1 x_4) \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + (x_2 - k_2 x_4) \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + (x_3 - k_3 x_4) \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = 0$.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明 因 $\text{rank(I)} = \text{rank(II)} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性 ,
 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性相 . 所以 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性表出, 即
 存在系数 k_1, k_2, k_3 , 使 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

要证 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 秩 4, 只要证明

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 线性 .

考虑组 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 (\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}) = 0$,
 即 $(x_1 - k_1 x_4) \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + (x_2 - k_2 x_4) \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + (x_3 - k_3 x_4) \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = 0$.

由于(III) 秩 4, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 线性 ,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

12. 证明 因 $\text{rank(I)} = \text{rank(II)} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性 ,
 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性相 . 所以 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 可以由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性表出, 即
 存在系数 k_1, k_2, k_3 , 使 $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

要证 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 秩 4, 只要证明

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 线性 .

考虑组 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 \left(\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \right) = 0$,

即 $(x_1 - k_1 x_4) \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} + (x_2 - k_2 x_4) \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} + (x_3 - k_3 x_4) \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = 0$.

由于(III) 秩 4, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 线性 , 所以

$$\begin{cases} x_1 - k_1 x_4 = 0 \\ x_2 - k_2 x_4 = 0 \\ x_3 - k_3 x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$





□

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明 由矩阵乘法知, 任意向量是与一个数积,

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明 由矩阵乘法知, 任意向量可以表示为一个数与一个列向量的积, 即列向量可以由线性表出.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明 由矩阵乘法知, \forall 任意 n 列向量, n 阶方阵 T 列向量 \tilde{N} 是与一个数积, 即 T 列向量可以由线性表出.

(1) 由于 T 列向量可以由线性表出, T 列向量可以由线性表出, 所以 $T + T$ 可以由 ; 线性表出,

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明 由矩阵乘法知, \forall 任意 n 列向量, n 阶方阵 T 列向量 \tilde{N} 是与一个数积, 即 T 列向量可以由线性表出.

(1) 由于 T 列向量可以由线性表出, T 列向量可以由线性表出, 所以 $T + T$ 可以由 ; 线性表出,
所以 $r(A) \leq ;$ 秩 $\leq 2.$

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

13. 证明由矩阵乘法知, \forall 任意 n 列向量, n 阶方阵 T 列向量 \tilde{N} 是与一个数积, 即 T 列向量可以由线性表出.

(1) 由于 T 列向量可以由线性表出, T 列向量可以由线性表出, 所以 $T + T$ 可以由线性表出,

所以 $r(A) \leq ;$ 秩 $\leq 2.$

(2) 若 ; 线性相关, 则 ; 秩 < 2 , 从而 $r(A) \leq ;$ 秩 $< 2.$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

14.解



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

14. 解 以向量 $X_A; X_B; X_C$ 分别表示 $A; B; C$ 三种型 混凝土
中水泥、水、砂、石、灰 配比，



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

14. 解 以向量 $X_A; X_B; X_C$ 分别表示 A; B; C 三种型 混凝土
中水泥、水、砂、石、灰 配比，即，

$$X_A = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; X_B = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; X_C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

14. 解 以向量 $X_A; X_B; X_C$ 分别表示 $A; B; C$ 三种型 混凝土
中水泥、水、砂、石、灰 配比，即，

$$X_A = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; X_B = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; X_C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(1) 要生产 种成分 16, 10, 21, 9, 4 混凝土，
设 $A; B; C$ 分别需要 比例 $k_1; k_2; k_3$ ，

习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

14. 解 以向量 $X_A; X_B; X_C$ 分别表示 $A; B; C$ 三种型 混凝土
中水泥、水、砂、石、灰 配比，即，

$$X_A = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; X_B = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; X_C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(1) 要生产 种成分 16, 10, 21, 9, 4 混凝土，
设 $A; B; C$ 分别需要 比例 $k_1; k_2; k_3$ ，则

$$k_1 X_A + k_2 X_B + k_3 X_C = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

属于方程组 增矩阵实施初行变换，化

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 0.56 \\ 0 & 0 & 1 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

属于方程组 增矩阵实施初行变换，化

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 0.56 \\ 0 & 0 & 1 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以需要8% A型, 56% B型, 36% C型.



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

é 方程组 增 行变换，化

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 0.56 \\ 0 & 0 & 1 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

所以需要8% A型, 56% B型, 36% C型.

所以生产200kg这种混凝土，

需要16kg A型, 112kg B型, 72kg C型



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

(2) 要生产 种成分 30, 57, 69, 7, 80 混凝土,
设 $A; B; C$ 分别需要 比例 $k_1; k_2; k_3$,



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

(2) 要生产 ~~种成分~~ 种成分 30, 57, 69, 7, 80 混凝土,
设 $A; B; C$ 分别需要 比例 $k_1; k_2; k_3$, 则

$$k_1 X_A + k_2 X_B + k_3 X_C = \begin{pmatrix} 30 \\ 57 \\ 69 \\ 7 \\ 80 \end{pmatrix}$$





习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 57 \\ 69 \\ 7 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

é 方程组 增 矩阵实施初 行变换，化

$$\left(\begin{array}{ccccc} 10 & 10 & 10 & 57 \\ 0 & 1 & 4 & 40 \\ 0 & 0 & 5 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$



习题3.4($P_{118} - P_{119}$)

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 57 \\ 69 \\ 7 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

é方程组 增 直阵实施初 行变换，化

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 57 \\ 0 & 1 & 4 & 40 \\ 0 & 0 & 5 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 ϵ 应 方程组 解, 也就是说利

用A; B; C三种型

混凝土，不能配成客户需要型



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email : Ning.qun@163.com