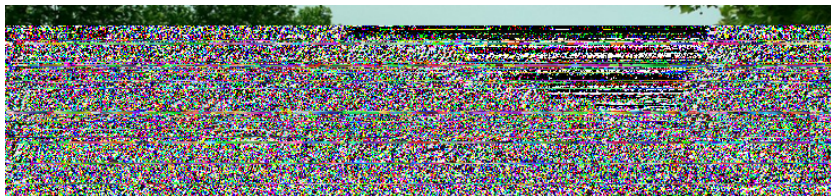


线性 数

第四章：行列式

宿州学院 数学与统计学院



目录

1 4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展开定理.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展开定理.

先 $\cup \setminus$ 分 γ 阵的概念.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\dot{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\dot{Y}$ 阵, $\dot{0}$ 是将 $\dot{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 ± 计算行列式 行列式的计算还有另外 ~ 种方法, 即行列式的展定理.

先 Ú \ 分 Ý 阵的概念. 所谓分 Ý 阵, ò 是将 Ý 阵按需 ± 分割成 e 个 f . X

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \pm \checkmark \text{ 分割}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式
 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\dot{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\dot{Y}$ 阵, $\dot{0}$ 是将 $\dot{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm \text{分割}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 ± 计算行列式 行列式的计算还有另外 ~ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\dot{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\dot{Y}$ 阵, $\dot{\cup}$ 是将 $\dot{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm \text{ } \dot{S} \text{ 分割}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式
 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\dot{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\dot{Y}$ 阵, $\dot{0}$ 是将 $\dot{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm \text{ } \dot{S} \text{ 分割}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式
 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\dot{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\dot{Y}$ 阵, $\dot{0}$ 是将 $\dot{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm \text{ } \dot{S} \text{ 分割}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 $\pm$ 计算行列式 行列式的计算还有另外 $\sim$ 种方法, 即行列式的展定理.

先 $\cup \setminus$ 分 $\hat{Y}$ 阵的概念. 所谓分 $\hat{Y}$ 阵, $\hat{0}$ 是将 $\hat{Y}$ 阵按需 $\pm$ 分割成 e 若干个 f $\cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm \text{ } \hat{S} \text{ 分割}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 ± 计算行列式 行列式的计算还有另外 ~ 种方法, 即行列式的展定理.

先 分 块 阵的概念. 所谓分 块 阵, 是将 阵按需求 ± 分割成 e 个 子 阵.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{分块}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 ± 计算行列式 行列式的计算还有另外 ~ 种方法, 即行列式的展定理.

先 分 块 的概念. 所谓分 块 阵, 是将 阵按需求 ± 分割成 e 个 子 阵.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \pm \text{ 分块 } \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为 n 形行列式 ± 计算行列式 行列式的计算还有另外 ~ 种方法, 即行列式的展定理.

先 分 块 的概念. 所谓分 块 阵, 是将 阵按需求 ± 分割成 e 个 子 阵.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{分块}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3 n 行列式的展 定理 拉姆法则

则 $\dot{Y}$ 阵 A 记 $\dot{S}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展 定理 拉姆法则

则 $\dot{Y}$ 阵 A 记 $\dot{S}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

则 $\mathbf{Y}$ 阵 $\mathbf{A}$ 记 $\mathbf{S}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

则 $\dot{Y}$ 阵 A 记 $\dot{S}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

则 Y 阵 A 记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

则 Y 阵 A 记 S

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

则 Y 阵 A 记 $\tilde{S}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

则 Y 阵 A 记 S

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

则 $\dot{Y}$ 阵 A 记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

$\dot{Y}$ 阵的分块是为了突出 $\dot{Y}$ 阵的特征，使得 $\dot{Y}$ 阵的表述更为简洁。在 p 面的 $\dot{Y}$ 阵 A ，经过分块后，其特征更为鲜明，分块 A_{11} 和 A_{22} 都是数量阵，即 $A_{11} = 3I_2$ ， $A_{22} = 2I_2$ ，而分块 A_{12} 则是 0 阵。



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

则 $\dot{Y}$ 阵 A 记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

$\dot{Y}$ 阵的分块是为了突出 $\dot{Y}$ 阵的特征，使得 $\dot{Y}$ 阵的表述更为简洁。在平面的 $\dot{Y}$ 阵 A ，经过分块后，其特征更为鲜明，分块 A_{11} 和 A_{22} 都是数量阵，即 $A_{11} = 3I_2$ ， $A_{22} = 2I_2$ ，而分块 A_{12} 则是 0 分块。利用分块 $\dot{Y}$ 阵， A 表述为 $A = \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ A_{21} & 2I_2 \end{pmatrix}$ ，



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

则分块阵 A 记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

分块阵的分块是为了突出分块阵的特征，使得分块阵的表述更为简洁。在平面的分块阵 A ，经过分块后，其特征更为鲜明，分块阵 A_{11} 和 A_{22} 都是数量阵，即 $A_{11} = 3I_2$ ， $A_{22} = 2I_2$ ，而分块阵 A_{12} 则是 0 分块阵。利用分块阵， A 表述为 $A = \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ A_{21} & 2I_2 \end{pmatrix}$ ，这种表述简洁明了地显示了分块阵 A 的特征。

4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

分 $\hat{Y}$ 阵还 $\pm$ 按照普通 $\hat{Y}$ 阵 $\sim$? 行运算. X

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

分 n 阶行列式是否按照普通行列式 ~ 行运算. X

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

分, $\dot{Y}$ 阵还 $\pm$ 按照普通 $\dot{Y}$ 阵 $\sim$? 行运算. X

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

是两个 $\ddot{a}$ 有相同分, 的4 5 $\dot{Y}$ 阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

即, A 有相同分量的 n 个 n 阶子阵之和 E 是 n 个 n 阶子阵, 且只 $\pm$ 将其对应分量按 n 阶子阵的加法相加.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

即， $\mathbf{A}$ 有相同分量的 n 个 $(n-1)$ 阶子阵之和 E 是 n 个 $(n-1)$ 阶子阵，且只 $\pm$ 将其对应分量按 $(n-1)$ 阶子阵的加法相加。再 $\times$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

即, A 有相同分量的 n 个 n 阶子阵之和 E 是 n 个分量 n 阶子阵, 且只 $\neq$ 将其对应分量按 $\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

即， $\mathbf{A}$ 有相同分量的子阵的两子阵之和 $\mathbf{E}$ 是 n 个分量的子阵，且只将其对应分量按子阵的加法相加。再 $\times$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

即， $\mathbf{A}$ 有相同分块， $\mathbf{A}$ 阵的两 $\mathbf{A}$ 阵之和 $\mathbf{E}$ 是 n 个分块 $\mathbf{A}$ 阵，且只 $\pm$ 将其对应 $\mathbf{A}$ 按 $\mathbf{A}$ 阵的加法相加。再 $\times$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$





4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\text{则 } AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}:$$

即, n 数符合 n 阵乘法 $\dagger$ 求的分 n 阵之积 E 是 n 个分 n 阵, 且其每 n 个 f 是相应 f 按照 n 阵乘法规则相乘所得到的 f .



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\text{则 } AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}:$$

即, n 数符合 n 阵乘法 $\dagger$ 求的分 n 阵之积 E 是 n 个分 n 阵, 且其每 n 个 n 是相应 n 按照 n 阵乘法规则相乘所得到的 n .

$\dagger$ 特别 $\dagger$ 的是: 分 n 阵的运算, 其分 n 必须符合 n 阵运算的 $\dagger$ 求才 $\dagger$ 计算. $\times$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\text{则 } AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix};$$

即, n 个符合 n 阵乘法 $\dagger$ 求的分 n 阵之积 E 是 n 个分 n 阵, 且其每 n 个 f 是相应 f 按照 n 阵乘法规则相乘所得到的 f .

$\dagger$ 特别 $\dagger$ 的是: 分 n 阵的运算, 其分 n 必须符合 n 阵运算的 $\dagger$ 求才 $\dagger$ 计算. $\times$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\text{则 } AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} :$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能按行加法, 也不能按列乘法.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$m \times n$ 矩阵 $A; B$ 都是 $m \times n$ 分块矩阵, 但 S 为 $n \times n$ 分块矩阵, 它们既不能 $\circ$ 加法, $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法.

再 $X, m \times n$ 矩阵 A 行的列分块,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能 % 加法, $\cdot$ 不能 % 乘法.

再 $X, m \times n$ 矩阵 A 行的列分块,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$m \times n$ 矩阵 $A; B$ 都是 $m \times n$ 分块矩阵, 但 S 为 $n \times n$ 分块矩阵, 它们既不能 $+$ 加法, $\cdot$ 不能 $\times$ 乘法.

再 $X, m \times n$ 矩阵 A 行的列分块,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$m \times n$ 矩阵 $A; B$ 都是 $m \times n$ 分块矩阵, 但 S 为 $n \times n$ 分块矩阵, 它们既不能 $+$ 加法, $\cdot$ 不能 $\times$ 乘法.

再 $X, m \times n$ 矩阵 A 行的列分块,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$m \times n$ 矩阵 $A; B$ 都是 $m \times n$ 分块矩阵, 但 S 为 $n \times n$ 分块矩阵, 它们既不能 $+$ 加法, $\cdot$ 不能 $\times$ 乘法.

再 $X, m \times n$ 矩阵 A 行的列分块,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能 % 加法, $\cdot$ 不能 % 乘法.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能 % 加法, $\cdot$ 不能 % 乘法.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能 % 加法, $\cdot$ 不能 % 乘法.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵, 但 S 为分块矩阵, 它们既不能 % 加法, $\cdot$ 不能 % 乘法.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

矩阵 A, B 都是 2×2 分块矩阵，但 S 为分块矩阵，它们既不能 $\circ$ 加法， $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法。

再 X ， $m \times n$ 矩阵 A ？行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

则 $\pm A$ 为系数矩阵的线性方程 $AX = b$ ，按照分块矩阵的乘法 $\pm$ 表述为

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n = b;$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵 $\bullet$ 是 n 个列分块矩阵，即

$$BA = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

阵 $A; B$ 都是 2×2 分, 阵, 但 S 为分, 阵, 它们既不能 $\circ$ 加法, $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法.

再 X , $m \times n$ 阵 A ? 行的列分,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

则 $\pm A$ 为系数阵的线性方程 $| AX = b$, 按照分, 阵的乘法 $\pm$ 表述为

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n = b;$$

阵与列分, 阵相乘, 积阵 $\bullet$ 是 $\sim$ 个列分, 阵, 即

$$BA = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot 1 & B \cdot 2 & \cdots & B \cdot n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

阵 A ; B 都是 2×2 分, 阵, 但 S 为分, 阵, 它们既不能 $\circ$ 加法, $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法.

再 X , $m \times n$ 阵 A ? 行的列分,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

则 $\pm A$ 为系数阵的线性方程 $| AX = b$, 按照分, 阵的乘法 $\pm$ 表述为

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n = b;$$

阵与列分, 阵相乘, 积阵 $\bullet$ 是 $\sim$ 个列分, 阵, 即

$$BA = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot 1 & B \cdot 2 & \cdots & B \cdot n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

阵 A ; B 都是 2×2 分, 阵, 但 S 为分, 阵, 它们既不能 $\circ$ 加法, $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法.

再 X , $m \times n$ 阵 A ? 行的列分,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

则 $\pm A$ 为系数阵的线性方程 $| AX = b$, 按照分, 阵的乘法 $\pm$ 表述为

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n = b;$$

阵与列分, 阵相乘, 积阵 $\bullet$ 是 $\sim$ 个列分, 阵, 即

$$BA = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot 1 & B \cdot 2 & \cdots & B \cdot n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

阵 A ; B 都是 2×2 分, 阵, 但 S 为分, 阵, 它们既不能 $\circ$ 加法, $\bullet$ 不能 $\circ$ 乘法.

再 X , $m \times n$ 阵 A ? 行的列分,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

则 $\pm A$ 为系数阵的线性方程 $| AX = b$, 按照分, 阵的乘法 $\pm$ 表述为

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_n \cdot n = b;$$

阵与列分, 阵相乘, 积阵 $\bullet$ 是 $\sim$ 个列分, 阵, 即

$$BA = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot 1 & B \cdot 2 & \cdots & B \cdot n \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

矩阵 B 与 矩阵 A 的第 k 列 A_k 相乘，得积 矩阵 BA 的第 k 列 $B A_k$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

n 阶阵 B 与 n 阶阵 A 的第 k 列 A_k 相乘, 得积 n 阶阵 BA 的第 k 列 $B A_k$.

不证明的给出 n 阶阵

定理 4.1 设 P 是 n 阶初等阵, 则分块阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 是 $n+1$

阶初等阵, 且 $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det P$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

将阵 B 与阵 A 的第 k 列 k 相乘, 得积阵 BA 的第 k 列 B_k .
不证明的给出下列定理

定理4.1 设 P 是 n 阶初等阵, 则分块阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 是 $n+1$

阶初等阵, 且 $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det P$.

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$, $b \in F^{1 \times n}$, 则对分块阵 $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, 有 $\det B = \det \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = b \det A$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值

分 阵 $\begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix} = b \det A$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值

分 阵 $\begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix} = b \det A$.

x 下 \ 余 f 式和 数余 f 式的概念.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值

分 n 阵 $\begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ & A \end{pmatrix} = b \det A$.

n 下 $n-1$ 余子式和 代数余子式的概念.

定理 4.2 设 $\det A = \det[(a_{ij})_{n \times n}]$, 在 n 阵 A 中 划除元素 a_{ij} 所在的第 i 行 第 j 列, 余下 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的相对位置 定 M_{ij} 个 $n-1$ 行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记 M_{ij} .

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称为元素 a_{ij} 的 代数余子式.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例 X , n 行列式

$$jA_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 $\sim$ 个元素都对应 $X \sim$ 个余 f 式和 $\sim$ 个数余 f 式 共9个 数
余 f 式, 它们分别是:



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则例 X , n 行列式

$$jAj = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 $\sim$ 个元素都对应 $X \sim$ 个余 f 式和 $\sim$ 个数余 f 式 共9个 数余 f 式, 它们分别是:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例 X, n 行列式

$$jA_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 ~ 个元素都对应 X ~ 个余 f 式和 ~ 个 数余 f 式 共9个 数
余 f 式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例 X, n 行列式

$$jAj = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 ~ 个元素都对应 X ~ 个余 f 式和 ~ 个 数余 f 式 共9个 数
余 f 式, 它们分别是:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例 X, n 行列式

$$jAj = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 ~ 个元素都对应 X ~ 个余 f 式和 ~ 个 数余 f 式 共9个 数
余 f 式, 它们分别是:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例 X, n 行列式

$$jAj = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 ~ 个元素都对应 X ~ 个余 f 式和 ~ 个 数余 f 式 共9个 数
余 f 式, 它们分别是:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

例 X, n 行列式

$$jAj = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

每 ~ 个元素都对应 X ~ 个余 f 式和 ~ 个 数余 f 式 共9个 数
余 f 式, 它们分别是:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

理4.3设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即阵A的第i行只有~个非0元素 a_{ij} , 则 $\det A = a_{ij} A_{ij}$.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本！的主定理.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本！的主定理.

定理4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则对 i 的 $1 \leq i \leq n$ ，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$



4.3 n 行列式的展 $\mathbf{A}$ 定理 拉姆法则

行列式的按行展 $\mathbf{A}$ 定理，即，本！的主 $\mathbf{A}$ 定理.

定理4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则对 $\mathbf{A}$ 的 $1 \leq i \leq n$ ，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第 i 行)展 $\mathbf{A}$ 定理.

$n \geq 2$ 行列式按第2行展 $\mathbf{A}$ 为例，说明 $\mathbf{A}$ 述定理成立.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

行列式的按行展定理，即，本！的主定理。

定理4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则对 i 的 $1 \leq i \leq n$ ，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第 i 行)展定理。

我们以 $n=3$ 行列式按第2行展为例，说明上述定理成立。

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

行列式的按行展定理，即，本！的主定理。

定理4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则对 i 的 $1 \leq i \leq n$ ，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第 i 行)展定理。

以 $n=3$ 行列式按第2行展为例，说明上述定理成立。

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 0 & 0 + a_{22} & 0 + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 + 0 & a_{22} + 0 & 0 + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} A + -2722 \det$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \\
&+ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}
\end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值 行列式按第 i 列的展定理.

定理4.4 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则对 i 的 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值 行列式按第 i 列的展定理.

定理4.4 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则对 i 的 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$

比 下两个行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

= 置不改变行列式的值 行列式按第 i 列的展开定理.

定理4.4 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则对 i 的 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$

比 下两个行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

它们除第 j 行元素 $\pm$ 外，其余各行元素 p 相同，所 $\pm$ ，
 $\det A$ 与 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式是相同的.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

它们除第 j 行元素 $\pm$ 外，其余各行元素 p 相同，所 $\pm$ ，
 $\det A$ 与 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式是相同的.

记 $A_{j1}; A_{j2}; \dots; A_{jn}$ 是 $\det A$ 第 j 行元素的 数余 f 式，它
 们 $\bullet$ 是 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

它们除第 j 行元素 $\pm$ 外, 其余各行元素 p 相同, 所 $\pm$,
 $\det A$ 与 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式是相同的.

记 $A_{j1}; A_{j2}; \dots; A_{jn}$ 是 $\det A$ 第 j 行元素的 数余 f 式, 它们
 • 是 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式.

5 到 $\det B$ 有两行元素相同, 所 $\pm \det B = 0$. 将 $\det B$ 按
 第 j 行展, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

它们除第 j 行元素 $\pm$ 外，其余各行元素 p 相同，所 $\pm$ ，
 $\det A$ 与 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式是相同的.

记 $A_{j1}; A_{j2}; \dots; A_{jn}$ 是 $\det A$ 第 j 行元素的 数余 f 式，它们
 是 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式.

5 到 $\det B$ 有两行元素相同，所 $\pm \det B = 0$. 将 $\det B$ 按
 第 j 行展，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$$

将 p 式放在 $\det A$ 中) 释， 0 是 $\det A$ 中第 i 行元素与第 j 行元
 素 ($i \neq j$) 的 数余 f 式对应乘积的和等于 0 .



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

它们除第 j 行元素 $\pm$ 外，其余各行元素 p 相同，所 $\pm$ ，
 $\det A$ 与 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式是相同的.

记 $A_{j1}; A_{j2}; \dots; A_{jn}$ 是 $\det A$ 第 j 行元素的 数余 f 式，它们
 是 $\det B$ 第 j 行相应位置元素的 数余 f 式.

5 到 $\det B$ 有两行元素相同，所 $\pm \det B = 0$. 将 $\det B$ 按
 第 j 行展，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$$

将 p 式放在 $\det A$ 中) 释，0 是 $\det A$ 中第 i 行元素与第 j 行元
 素 ($i \neq j$) 的 数余 f 式对应乘积的和等于 0 .

与定理 4.3 相 (合，并 5 行列式对行成立的性质对列 • 成
 立，则有



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

定理4.5 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, A_{ij} 为 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \cdots + a_{nl}A_{kn} = \begin{cases} \det A & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \cdots + a_{nl}A_{nk} = \begin{cases} \det A & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例4.3 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

例4.3 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.

由于 A 的第五行有3个0元素, 所以将 $\det A$ 按第五行展开计算时, 只计算两个四行列式

$$\det A = a_5 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + b_5 (-1) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

而

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_4(-1) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

而

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_4(-1) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4(-1) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$





4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

由定理4.5, 得到逆阵 A 的逆阵的另一种求法.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

由定理4.5, 得到逆阵 A 的逆阵的另一种求法.

定理4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶阵, A_{ij} 是 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式. 构造 $n \times n$ 阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为阵 A 的伴随阵. 记 $\tilde{A}$.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A) I_n
\end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A) I_n
\end{aligned}$$

即, $AA^T = A^T A = (\det A) I_n$:



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A\left(\frac{1}{\det A}A\right) = \left(\frac{1}{\det A}A\right)A = I_n$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A\left(\frac{1}{\det A}A\right) = \left(\frac{1}{\det A}A\right)A = I_n$.
 所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A\left(\frac{1}{\det A}A\right) = \left(\frac{1}{\det A}A\right)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A(\frac{1}{\det A}A) = (\frac{1}{\det A}A)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.

在 $\det A \neq 0$ 时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$, 其中 A 为 A 的伴随阵.

例4.4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A(\frac{1}{\det A}A) = (\frac{1}{\det A}A)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.

在 $\det A \neq 0$ 时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$, 其中 A 为 A 的伴随阵.

例4.4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

)



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A(\frac{1}{\det A}A) = (\frac{1}{\det A}A)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A^{-1} 存在当且仅当 $\det A \neq 0$.

在 $\det A \neq 0$ 时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$, 其中 A 为 A 的伴随阵.

例4.4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

) 计算 $\det A$ 及每个元素的代数余子式.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A(\frac{1}{\det A}A) = (\frac{1}{\det A}A)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.

在 $\det A \neq 0$ 时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$, 其中 A 为 A 的伴随阵.

例4.4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

1) 计算 $\det A$ 及每个元素的代数余子式.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 有 $A(\frac{1}{\det A}A) = (\frac{1}{\det A}A)A = I_n$.

所以 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$.

定理4.6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.

在 $\det A \neq 0$ 时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A$, 其中 A 为 A 的伴随阵.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
 A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
 A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1
 \end{aligned}$$



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

$$\text{所 } \pm A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\text{所 } \pm A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{14} \right) A$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\text{所 } \pm A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{14} \right) A = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$





4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

$$\text{所 } \pm A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{14} \right) A = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

利用行列式的展定理，给出由 n 个方程构成的 n 元线性方程组 (在其系数矩阵的行列式不为 0 时的公式)，即线性方程组的拉姆法则。



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

定理4.7(拉姆法则) 设 n 元线性方程 |

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

记 $AX = b$. 其中, b 为方程 | 的常数列, A 为其系数阵, $\det A$ 为其系数行列式.

设 A_{ij} 为 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的 数余 f 式.



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

定理4.7(拉姆法则) 设 n 元线性方程 |

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

记 $AX = b$. 其中, b 为方程 | 的常数列, A 为其系数阵, $\det A$ 为其系数行列式.

设 A_{ij} 为 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余式. 记 A_k 是阵 A 中的第 k 列用方程 | 的常数列替换而得到的阵, 则 $\det A_k$ 的第 k 列元素与 $\det A$ 第 k 列的相同位置的元素有相同的代数余式, 将 $\det A_k$ 按第 k 列展开, 则

$$\det A_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}:$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{array} \right. .$$



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{array} \right. .$$

推论4.2



4.3 n 行列式的展 定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{cases}.$$

推论4.2 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases};$$

当其系数行列式 $\det A \neq 0$ 时, 它有唯一的零解;



4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \end{cases}.$$

推论4.2 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases};$$

当其系数行列式 $\det A \neq 0$ 时, 它有唯一的零解;

当其系数行列式 $\det A = 0$ 时, 它有非零解.

4.3 n 行列式的展定理 拉姆法则

由推论4.2 及向量 | 线性相关性, 得到

推论4.3



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

由推论4.2 及向量 | 线性相关性, 得到

推论4.3

n 方阵 A 的列向量线性无关当且仅当 $\det A \neq 0$.



4.3 n 行列式的展开定理 拉姆法则

由推论4.2 及向量 | 线性相关性, 得到

推论4.3

n 方阵 A 的列向量线性无关当且仅当 $\det A \neq 0$.

n 方阵 A 的列向量线性相关当且仅当 $\det A = 0$.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

