

性代

1 五章：矩 、 似与合同

宿²学院 学与统 学院

目录

1 5.1 矩 、 似与合同



5.1 矩 阵、 相似与合同

矩阵 初 行变换可以 矩阵 化为规范阶梯形矩阵，由此给出了 线性方程组有解 充要条件 。



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]。称 列变换为矩 初 列变换:



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]. 称 列变换为矩 初 列变换:

(1) 交换矩 两列;



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]. 称 列变换为矩 初 列变换:

(1) 交换矩 两列; (2) 矩 某一行乘非0 ;



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]. 称 列变换为矩 初 列变换:

(1) 交换矩 两列; (2) 矩 某一系列乘非0 ; (3) 矩 某一系列乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

^{1/2} 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则称矩 A 和 B .



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]. 称 列变换为矩 初 列变换:

(1) 交换矩 两列; (2) 矩 某一行乘非0 ; (3) 矩 某一行乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

^{1/2} 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则称矩 A 和 B .
“ ” 两个同阶矩 f 一 « 特 关 , 其满足:



5.1 矩

、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 , 由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 , 也能引入矩 初 列变换概[^]. 称 列变换为矩 初 列变换:

(1) 交换矩 两列; (2) 矩 某一行乘非0 ; (3) 矩 某一行乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

^{1/2} 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则称矩 A 和 B .

“ ” 两个同阶矩 f 一 « 特 关 , 其满足:

(1) 反 性. 任何矩 $\tilde{N}$ 与它自 ;



5.1 矩

、 似与合同

初 行变换可以 初 化为规范阶梯形矩 阵，由此给出了 性方程组有解 充要条 件。其 中，也能引入矩 阵初 列变换概 念。称 列变换为矩 阵初 列变换：

(1)交换矩 两列; (2) 矩 某一行乘非0 ; (3) 矩 某一行乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

½ 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则称矩 A 和 B

“ ” 两个同阶矩 f 一«特关, 其满足:

(1)反 性. 任何矩 $\tilde{N}$ 与它自

(2) 对称性. 若矩 A 与 B , 则矩 B 与 A 也 ;

(3) 传递性. 若矩 A 与 B , 矩 B 与 C , 则矩 A

与C也 .



5.1 矩、似与合同

问题：两个同阶矩满足么条件？



5.1 矩 似与合同

问题：两个同阶矩 满足 么条 一 $\frac{1}{2}$ ？

矩 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过初 行变换化为了规范阶梯形
矩 C .





5.1 矩

、 似与合同

D 左乘 $(l = 1; 2; \dots; r)$ 列乘 (d_{lk}) $1 \leq k \leq r$,
 $(k = r + 1; r + 2; \dots; n)$, 则矩 D 可以化为

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5.1 矩

、 似与合同

D 左乘 $(l = 1; 2; \dots; r)$ 列乘 (d_{lk}) 右乘 $(k = r + 1; r + 2; \dots; n)$, 则矩 D 可以化为

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5.1 矩

、 似与合同

D 中 $1 \leq l \leq r$ 列乘 (d_{lk}) $1 \leq k \leq r$,
 $(k = r + 1; r + 2; \dots; n)$, 则矩 D 可以化为

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, 矩 A 经过初 变换(初 行变换和初 列变换)可以化
 为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其 r 为矩 A 的秩, 也 矩 A 的秩。



5.1 矩、似与合同

理5.1



5.1 矩、似与合同

理5.1



5.1 矩

、 似与合同

理5.1 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 且 $r(A) = r$, 则 A 于

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 称 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩 A 标准形.

它由 A 的秩 r 和阶 n 唯一确定.

由矩 A 满足对称性与传递性以 **理5.1** : 两个同

阶矩 A 与 B 相似的充要条件是它们有相同的秩.



5.1 矩

、 似与合同

理5.1 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 且 $r(A) = r$, 则 A 于

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 称 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩 A 标准形.

它由 A 和阶 唯一确 $\frac{1}{2}$.

由矩 满足 称性与传 4 性以 **理5.1** : 两个同

阶矩 充要条 他们有 同 .

例5.1



5.1 矩

、 似与合同

理5.1 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 且 $r(A) = r$, 则 A 于

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩 A 标准形.

它由 A 和阶 唯一确 $\frac{1}{2}$.

由矩 满足 称性与传 4 性以 **理5.1** : 两个同

阶矩 充要条 他们有 同 .

例5.1 $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, 若 $r(A) = 2$, 则矩 A 标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .
 交换 i 列和 j 列 应 初 矩 $P(i; j)$;



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换, 所 矩 也 初 矩 .

交换 $1 i$ 列和 $1 j$ 列 $\Rightarrow$ 初 矩 $P(i; j)$;

$1 i$ 列乘非0 $c \Rightarrow$ 初 矩 $P(i(c))$;



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换, 所 矩 也 初 矩 .

交换 $1 i$ 列和 $1 j$ 列 $\Rightarrow$ 初 矩 $P(i; j)$;

$1 i$ 列乘非0 $c \Rightarrow$ 初 矩 $P(i(c))$;

$1 i$ 列乘 k $1 j$ 列 $\Rightarrow$ 初 矩 $P(j(k); i)$.



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换, 所 矩 也 初 矩 .

交换 $1\ i$ 列和 $1\ j$ 列 $\rightarrow$ 初 矩 $P(i; j)$;

$1\ i$ 列乘非0 $c \rightarrow$ 初 矩 $P(i(c))$;

$1\ i$ 列乘 k $1\ j$ 列 $\rightarrow$ 初 矩 $P(j(k); i)$.

可以检验 y : 矩 A 初 列变换, 就 于在矩
 A 右侧乘上 应 初 矩 ,



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换, 所 矩 也 初 矩 .

交换 $1 i$ 列和 $1 j$ 列 应 初 矩 $P(i; j)$;

$1 i$ 列乘非0 c 应 初 矩 $P(i(c))$;

$1 i$ 列乘 k $1 j$ 列 应 初 矩 $P(j(k); i)$.

可以 接 验 y : 矩 A 初 列变换, 就 于在矩
 A 右侧乘上 应 初 矩 ,

(1) 交换矩 A $1 i$ 列和 $1 j$ 列, 矩 B ,

则 $AP(i; j) = B$;



5.1 矩

、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换, 所 矩 也 初 矩 .

交换 $1 i$ 列和 $1 j$ 列 $\Rightarrow$ 初 矩 $P(i; j)$;

$1 i$ 列乘非0 $c \Rightarrow$ 初 矩 $P(i(c))$;

$1 i$ 列乘 k $1 j$ 列 $\Rightarrow$ 初 矩 $P(j(k); i)$.

可以检验: 矩 A 初 列变换, 就 于在矩
 A 右侧乘上 应 初 矩 ,

(1) 交换矩 A $1 i$ 列和 $1 j$ 列, 矩 B ,
 则 $AP(i; j) = B$;

(2) 矩 A $1 i$ 列乘非 c , 矩 B ,
 则 $AP(i(c)) = B$;





5.1 矩、似与合同

理5.1可以叙 为

5.1 矩、似与合同

½ 理5.1可以叙 为

½ 理5.2



5.1 矩

、 似与合同

½ 理5.1可以叙 为

½ 理5.2 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 且 $r(A) = r$, 则存在 m 阶初 矩 $P_1; P_2; \dots; P_s$, n 阶初 矩 $Q_1; Q_2; \dots; Q_t$,

$$P_s \quad P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \quad Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

$P_1; P_2; \dots; P_s$ 应 初 行变换 é 应 初 矩 ;
 $Q_1; Q_2; \dots; Q_t$ 应 初 列变换 é 应 初 矩 。





5.1 矩

、 似与合同

在信号处理，信号传输，电路分析问题中，经常会用到 n 个变量 f 的线性变换，而线性变换在给出一组“基础变量”时，用矩阵形式表示为 $\tilde{N}$ 矩阵形式。

线性变换在给出一组“基础变量”时，矩阵 A ，在另一组基础变量时，矩阵 B ，则矩阵 A 与 B 在数学上有关，存在可逆矩阵 P ， $P^{-1}AP = B$ 。







5.1 矩、似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关，其满足：



5.1 矩、似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关，其满足：
 (1)反 性. 任何方 $\tilde{N}$ 和它自 似；



5.1 矩 阵、 相似与合同

矩阵 A 与 B 相似，是指存在可逆矩阵 P ，使得 $B = P^{-1}AP$ 。两个同阶方阵 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$ 。相似关系 $\sim$ 具有以下性质：

- (1) 反 性. 任何方阵 A 和它自身相似；
- (2) 对称性. 方阵 A 与 B 相似，则 B 与 A 也相似。



5.1 矩

、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 , 其满足:

- (1)反 性. 任何方 $\tilde{N}$ 和它自 似;
- (2)é 称性. 方 A 与 B 似, 则 B 与 A 也 似.
- (3)传 4 性. 方 A 与 B 似, B 与 C 似, 则 A 与 C 似.



5.1 矩

、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 , 其满足:

(1)反 性. 任何方 $\tilde{N}$ 和它自 似;

(2)é 称性. 方 A 与 B 似, 则 B 与 A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与 B 似, B 与 C 似, 则 A 与 C 似.

问题 $\forall$, 经常需要寻找恰 “基础变量”, 性
变换在此 “基础变量” 矩 为 é 角形矩 .



5.1 矩

、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 , 其满足:

(1)反 性. 任何方 $\tilde{N}$ 和它自 似;

(2)é 称性. 方 A 与 B 似, 则 B 与 A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与 B 似, B 与 C 似, 则 A 与 C 似.

问题 $\forall$, 经常需要寻找恰 “基础变量”, 性
变换在此 “基础变量” 矩 为 é 角形矩 .

½ 义5.3



5.1 矩

、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 , 其满足:

(1)反 性. 任何方 $\tilde{N}$ 和它自 似;

(2)é 称性. 方 A 与 B 似, 则 B 与 A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与 B 似, B 与 C 似, 则 A 与 C 似.

问题 $\forall$, 经常需要寻找恰 “基础变量”, 性
变换在此 “基础变量” 矩 为 é 角形矩 .

$\frac{1}{2}$ 义5.3 方 矩 A , 若存在 é 角矩

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_n \end{pmatrix};$$

A 与 D 似, 则称 A 可以 é 角化.



5.1 矩、 似与合同

问题： 么样 矩 可以 é 角化？ 在矩 A 可以 é 角化， 如何求 似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ é 角？



5.1 矩

、 似与合同

问题： 么样 矩 可以 é 角化？ 在矩 A 可以 é 角化， 如何求 似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ é 角？

矩 A 与 B 似， 且其 似变换矩 P ， 若满足 $P^{-1} = P^t$ ， P 逆矩 P 转 ~ 矩， 也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$ ， 这 « 关 又称为合同。



5.1 矩

、 似与合同

问题： 么样 矩 可以 é 角化？ 在矩 A 可以 é 角化， 如何求 似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ é 角？

矩 A 与 B 似， 且其 似变换矩 P ， 若满足 $P^{-1} = P^t$ ， P 逆矩 P 转 ~ 矩， 也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$ ， 这 « 关 又称为合同。

½ 义5.4



5.1 矩

、 似与合同

问题：什么样矩可以 ϵ 角化？在矩 A 可以 ϵ 角化，如何求似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ 是角？

矩 A 与 B 似，且其似变换矩 P ，若满足 $P^{-1} = P^t$ ， P 逆矩 P 转 $\sim$ 矩，也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$ ，这«关又称为合同。

定义5.4 A, B 两个 n 阶方，若存在可逆矩 P ， $P^tAP = B$ ，则称矩 A, B 合同，矩 P 称为 A, B 合同变换矩。



5.1 矩

、 似与合同

问题：什么样矩可以 ϵ 角化？在矩 A 可以 ϵ 角化，如何求似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ 是角？

矩 A 与 B 似，且其似变换矩 P ，若满足 $P^{-1} = P^t$ ， P 逆矩 P 转 $\sim$ 矩，也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$ ，这«关又称为合同。

定义5.4 A, B 两个 n 阶方，若存在可逆矩 P ， $P^tAP = B$ ，则称矩 A, B 合同，矩 P 称为 A, B 合同变换矩。

可逆矩 P ，若满足 $P^{-1} = P^t$ ，则称 P 为交矩。



5.1 矩

、 似与合同

问题：什么样矩可以 ϵ 角化？在矩 A 可以 ϵ 角化，如何求似变换矩 P ， $P^{-1}AP$ 是角？

矩 A 与 B 似，且其似变换矩 P ，若满足 $P^{-1} = P^t$ ， P 逆矩 P 转 $\sim$ 矩，也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$ ，这«关又称为合同。

定义5.4 A, B 两个 n 阶方，若存在可逆矩 P ， $P^tAP = B$ ，则称矩 A, B 合同，矩 P 称为 A, B 合同变换矩。

可逆矩 P ，若满足 $P^{-1} = P^t$ ，则称 P 为交矩。
矩合同也满足反性、 ϵ 称性和传递性。

同样问题：矩满足么条件，才可以合同于 ϵ 角矩？



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

