性代

1 五章：矩 、 似与合同

宿 2 学院 学与统 学院

目录

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 .

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；(2) 矩 某一列乘非0 ；

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；(2) 矩 某一列乘非0 ；(3) 矩 某一列乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

½ 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m \quad n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m \quad n}$，则称矩 A 和B .

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；(2) 矩 某一列乘非0 ；(3) 矩 某一列乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

½ 义5.1 若矩 $A = (a_{ij})_{m\ n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B = (b_{ij})_{m\ n}$，则称矩 A 和B .

“ ” 两个同阶矩 f 一« 特 关 ，其满足：

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；(2) 矩 某一列乘非0 ；(3) 矩 某一列乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

½ 义5.1 若矩 $A=(a_{ij})_{m\ n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B=(b_{ij})_{m\ n}$，则称矩 A 和B .

“ ” 两个同阶矩 f 一«特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何矩 Ñ与它自 ；

5.1 矩 、 似与合同

矩 初 行变换可以 矩 化为规范阶梯形矩 ，由此给出了 性方程组有解 充要条 . 其 ，也能引入矩 初 列变换概念。称 列变换为矩 初 列变换：

(1)交换矩 两列；(2) 矩 某一列乘非0 ；(3) 矩 某一列乘 c 另一列.

矩 初 行变换和初 列变换统称为矩 初 变换.

½ 义5.1 若矩 $A=(a_{ij})_{m\ \ n}$ 经过初 变换(初 行变换和初 列变换) 化为了矩 $B=(b_{ij})_{m\ \ n}$，则称矩 A 和B .

" " 两个同阶矩 f 一« 特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何矩 Ñ 与它自 ;

(2) é 称性.若矩 A 与B ，则矩 B 与A 也 ;

(3)传 4 性. 若矩 A 与B ，矩 B 与C ,则矩 A 与C 也 .

5.1 矩 、 似与合同

问题 ：两个同阶矩 满足 么条 一½ ？

5.1 矩 、 似与合同

问题 ：两个同阶矩 满足 么条 一½ ？

矩 $A = (a_{ij})_{m \ n}$ 经过初 行变换化为了规范阶梯形矩 C .

5.1 矩 、 似与合同

D 1 $l(l = 1; 2; :::; r)$列乘(d_{lk}) 1 k列，$(k = r + 1; r + 2; :::; n)$，则矩 D 可以化为

$$D \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩 、 似与合同

D 1 $l(l = 1; 2; :::; r)$列乘(d_{lk}) 1 k列，$(k = r + 1; r + 2; :::; n)$，则矩 D 可以化为

$$D \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩 、 似与合同

D 1 $l(l=1;2;:::;r)$列乘(d_{lk}) 1 k列，$(k=r+1;r+2;:::;n)$，则矩 D 可以化为

$$D \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

，矩 A 经过初 变换(初 行变换和初 列变换)可以化为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其¥$r$ 为矩 A ì 元个 ，也 矩 A •。

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1 $A = (a_{ij})_{m \quad n}$，且$r(A) = r$，则A 于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为矩 A 标准形.

它由A • 和阶 唯一确½.

由矩 满足 é 称性与传 4 性以 ½ 理5.1 ：两个同阶矩 充要条 他们有 同 •.

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1 $A=(a_{ij})_{m\ \ n}$，且$r(A)=r$，则A 于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为矩 A 标准形.

它由A • 和阶 唯一确½.

由矩 满足 é 称性与传 4 性以 ½ 理5.1 ：两个同阶矩 充要条 他们有 同 •.

例5.1

5.1 矩 、 似与合同

½理5.1 $A=(a_{ij})_{m\ \ n}$，且$r(A)=r$，则A 于
$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩 A 标准形.

它由A •和阶 唯一确½.

由矩 满足é称性与传4性以 ½理5.1 ：两个同阶矩 充要条 他们有 同 •.

例5.1 $A=(a_{ij})_{3\ \ 4}$，若$r(A)=2$，则矩 A 标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列é 应 初 矩 $P(i;j)$；

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列 é 应 初 矩 $P(i;j)$ ；

1 i 列乘非0 c é 应 初 矩 $P(i(c))$ ；

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列 é 应 初 矩 $P(i;j)$；

1 i 列乘非0 c é 应 初 矩 $P(i(c))$；

1 i 列乘 k 1 j 列 é 应 初 矩 $P(j(k);i)$.

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列é 应 初 矩 $P(i;j)$；

1 i 列乘非0 c é 应 初 矩 $P(i(c))$；

1 i 列乘 k 1 j 列é 应 初 矩 $P(j(k);i)$.

可以†接验 y： é 矩 A 初 列变换，就 于在矩 A 右侧乘上 应 初 矩 ，

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列é 应 初 矩 $P(i; j)$；

1 i 列乘非0 c é 应 初 矩 $P(i(c))$；

1 i 列乘 k 1 j 列é 应 初 矩 $P(j(k); i)$.

可以†接验 y： é 矩 A 初 列变换，就 于在矩 A 右侧乘上 应 初 矩 ，

(1) 交换矩 A 1 i 列和 1 j 列， 矩 B ，则 $AP(i; j) = B$ ；

5.1 矩 、 似与合同

单位矩 经过一次初 列变换，所 矩 也 初 矩 .

交换 1 i 列和 1 j 列 é 应 初 矩 $P(i;j)$；

1 i 列乘非0 c é 应 初 矩 $P(i(c))$；

1 i 列乘 k 1 j 列 é 应 初 矩 $P(j(k);i)$.

可以 † 接验 y： é 矩 A 初 列变换，就 于在矩 A 右侧乘上 应 初 矩 ，

(1) 交换矩 A 1 i 列和 1 j 列， 矩 B，则 $AP(i;j)=B$；

(2) 矩 A 1 i 列乘非 c ， 矩 B，则 $AP(i(c))=B$；

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1可以叙 为

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1可以叙 为

½ 理5.2

5.1 矩 、 似与合同

½ 理5.1可以叙 为

½ 理5.2 $A = (a_{ij})_{m \quad n}$，且$r(A) = r$，则存在m 阶初 矩 $P_1; P_2; :::; P_s$，n 阶初 矩 $Q_1; Q_2; :::; Q_t$，

$$P_s \quad P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \quad Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

$P_1; P_2; :::; P_s$ 应 初 行变换 é 应 初 矩 ；
$Q_1; Q_2; :::; Q_t$ 应 初 列变换 é 应 初 矩 。

5.1 矩 、 似与合同

在信 处理，信号传 ，>路分析 问题¥，经常会用 õ 个变量 f 性变换，而 性变换在给½“基础变量” 学表达大Ñ 矩 形 .

性变换在给½“基础变量” 矩 A，在另一组基础变量 矩 B，则矩 A 与B在 学¥ 关 ，存在可逆矩 P， $P^{1}AP = B$.

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一« 特 关 ，其满足：

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一« 特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何方 Ñ 和它自 似；

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 ，其满足:

(1)反 性. 任何方 Ñ和它自 似；

(2) é 称性. 方 A 与B 似，则B 与A 也 似.

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何方 Ñ 和它自 似；

(2) é 称性. 方 A 与B 似，则B 与A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与B 似，B 与C 似，则A 与C 似.

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 ，其满足:

(1)反 性. 任何方 Ñ 和它自 似;

(2) é 称性. 方 A 与B 似，则B 与A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与B 似，B 与C 似，则A 与C 似.

问题 ¥，经常需要寻找恰 “基础变量”， 性 变换在此“基础变量” 矩 为 é 角形矩 .

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一« 特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何方 Ñ 和它自 似；

(2) é 称性. 方 A 与 B 似，则 B 与 A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与 B 似，B 与 C 似，则 A 与 C 似.

问题 ¥，经常需要寻找恰 “基础变量”， 性 变换在此“基础变量” 矩 为 é 角形矩 .

½ 义5.3

5.1 矩 、 似与合同

矩 似 两个同阶方 f 一«特 关 ，其满足：

(1)反 性. 任何方 Ñ和它自 似；

(2) é 称性. 方 A 与B 似，则B 与A 也 似.

(3)传 4 性. 方 A 与B 似，B 与C 似，则A 与C 似.

问题¥，经常需要寻找恰 “基础变量”， 性 变换在此“基础变量” 矩 为 é 角形矩 .

½ 义5.3 方 矩 A ，若存在 é 角矩

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_n \end{pmatrix};$$

A与D 似，则称A 可以 é 角化.

5.1 矩 、 似与合同

问题 ： 么样 矩 可以 é 角化？在矩 A 可以 é 角化，如何求 似变换矩 P， $P^{1}AP$ é 角 ？

5.1 矩 、 似与合同

问题 ： 么样 矩 可以 é 角化？在矩 A 可以 é 角化，如何求 似变换矩 P， $P^{-1}AP$ é 角 ？

矩 A 与 B 似，且其 似变换矩 P，若满足 $P^{-1} = P^t$， P 逆矩 P 转 ˜ 矩 ，也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$，这 « 关 又称为合同。

5.1 矩 、 似与合同

问题 ： 么样 矩 可以 é 角化？在矩 A 可以 é 角化，如何求 似变换矩 P， $P^{-1}AP$ é 角 ？

矩 A 与B 似，且其 似变换矩 P，若满足 $P^{-1} = P^t$， P 逆矩 P 转 ˜ 矩 ，也就 $P^{-1}AP = P^tAP = B$，这 « 关 又称为合同。

½ 义5.4

5.1 矩 、 似与合同

问题：么样 矩 可以é角化？在矩 A 可以é角化，如何求 似变换矩 P， $P^{1}AP$ é角 ？

矩 A 与B 似，且其 似变换矩 P，若满足 $P^{1} = P^{t}$， P 逆矩 P 转˜矩 ，也就 $P^{1}AP = P^{t}AP = B$，这«关 又称为合同。

½义5.4 A，B 两个n 阶方 ，若存在可逆矩 P，$P^{t}AP = B$，则称矩 A，B 合同，矩 P 称为A，B 合同变换矩 .

5.1 矩 、 似与合同

问题 ： 么样 矩 可以é角化？在矩 A 可以é角化，如何求 似变换矩 P， $P^{\ 1}AP$ é角 ？

矩 A 与B 似，且其 似变换矩 P，若满足 $P^{\ 1} = P^t$， P 逆矩 P 转˜矩 ，也就 $P^{\ 1}AP = P^tAP = B$，这«关 又称为合同。

½义5.4 A，B 两个n 阶方 ，若存在可逆矩 P，$P^tAP = B$，则称矩 A，B 合同，矩 P 称为A，B 合同变换矩 .

可逆矩 P，若满足$P^{\ 1} = P^t$，则称P 为 交矩 .

5.1 矩 、 似与合同

问题 ： 么样 矩 可以é角化？在矩 A 可以é角化，如何求 似变换矩 P， $P\ ^1AP$ é角 ？

矩 A 与B 似，且其 似变换矩 P，若满足 $P\ ^1 = P^t$， P 逆矩 P 转˜矩 ，也就 $P\ ^1AP = P^tAP = B$，这«关 又称为合同。

½义5.4 A，B 两个n 阶方 ，若存在可逆矩 P，$P^tAP = B$，则称矩 A，B 合同，矩 P 称为A，B 合同变换矩 ．

可逆矩 P，若满足$P\ ^1 = P^t$，则称P 为 交矩 ．

矩 合同也满足反 性、é称性和传4性.

同样 问题：矩 满足 么条 ，才可以合同于é角矩 ？

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com