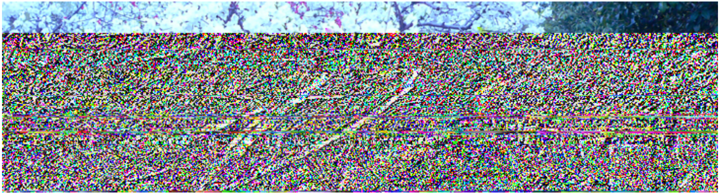
线性代数

第三章：向　空间

宿州学院　数学与统计学院



目录

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

与齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

有相同的系数矩阵，

3.6 线性方程组解的结构(1)

n元线性方程组

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

与齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & & + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & & + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & & + a_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

有相同的系数矩阵，称(2)为(1)导出齐次线性方程组.

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由定 3.10，当A的秩$r(A)$ 与$\overline{A}$ 的秩满足$r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，线性方程组(1)有无穷多解，其导出齐次线性方程组(2)有非零解(非平凡解).

3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定.方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由定 3.10，当A的秩$r(A)$ 与$\overline{A}$ 的秩满足$r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，线性方程组(1)有无穷多解，其导出齐次线性方程组(2)有非零解(非平凡解).

若$r(A)=r(\overline{A})=r<n$，设$\overline{A}$ 经过初等行变换可以化为具有r 主元的规范形阶梯形矩阵$\overline{J}$.为了表述的方便，不妨设其主元分别在第$1,2,\ldots,r$列.即

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \end{matrix} \right.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} & d_r \end{array}\right.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(r+1)} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(r+1)} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r(r+1)} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

经过相同的初等行变换，系数矩阵A化为

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$
J = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} \\
0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{pmatrix}
$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & b_{1(r+1)} & & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2(r+1)} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r(r+1)} & & b_{rn} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

从而导出齐次线性方程组(2)的通解为

$$\begin{cases} x_1 = b_{1(r+1)}x_{r+1} \quad b_{1n}x_n \\ x_2 = b_{2(r+1)}x_{r+1} \quad b_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_r = b_{r(r+1)}x_{r+1} \quad b_{rn}x_n \end{cases}$$

其中$x_{r+1}, \ldots, x_n$是自由未知 .

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知 $x_1, x_2, ..., x_r$ 被自由未知 $x_{r+1}, ..., x_n$ 唯一确定.

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 被自由未知 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 唯一确定.即定一组$x_{r+1}, \ldots, x_n$ 的取值，就能唯一地确定其余的未知 $x_1, x_2, \ldots, x_r$.所以，齐次线性方程组(2)的解集可以表示为

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b_{1(r+1)}c_{r+1} \quad b_{1n}c_n \\ b_{2(r+1)}c_{r+1} \quad b_{2n}c_n \\ \vdots \\ b_{r(r+1)}c_{r+1} \quad b_{rn}c_n \\ c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{其中} c_{r+1}, \ldots, c_n \text{是任意数} \right\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质：

3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质：

(1)设$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$是　中中的　解向　，则对任意

的$1 \quad i \quad m$，都有

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \quad + a_{in}k_n = 0, a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \quad + a_{in}l_n = 0$$

从而

$$a_{i1}(k_1 + l_1) + a_{i2}(k_2 + l_2) + \quad + a_{in}(k_n + l_n) = 0,$$

3.6 .

3.6 线性方程组解的结构(1)

即 中的任意 解向 的和 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ \vdots \\ k_n + l_n \end{pmatrix}$ 仍

在 中.

对任意的数l，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \quad + a_{in}(lk_n) = 0,$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

即 中的任意 解向 的和$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ \vdots \\ k_n + l_n \end{pmatrix}$仍在 中.

对任意的数l，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \quad + a_{in}(lk_n) = 0,$$

即 中解向 的任意数倍$l\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk_1 \\ lk_2 \\ \vdots \\ lk_n \end{pmatrix}$仍在 中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意　　解向　的和仍在　中，　中任意解向　的数积仍在　中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意 解向 的和仍在 中， 中任意解向 的数积仍在 中.

即，

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意 解向 的和仍在 中， 中任意解向 的数积仍在 中.

即，齐次线性方程组任意 解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意 解向 的和仍在 中， 中任意解向 的数积仍在 中.

即，齐次线性方程组任意 解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

关于数组向 的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意 解向 的和仍在 中， 中任意解向 的数积仍在 中.

即，齐次线性方程组任意 解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

关于数组向 的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7 设 是线性空间F^n 的非空子集，若 对F^n 的运算是封闭的 即，任意的α, β 2 F^n, k 2 F，都有$\alpha + \beta, k\alpha$ 2 F，则称 是F^n 的一 子空间.

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意　　解向　的和仍在　中，　中任意解向　的数积仍在　中.

即，齐次线性方程组任意　解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解.

关于数组向　的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中).

具有这种性质的F^n的子集称为子空间.

定义3.7 设　是线性空间F^n 的非空子集，若　对F^n 的运算是封闭的　即，任意的$\alpha, \beta \in F^n, k \in F$，都有$\alpha + \beta, k\alpha \in F$，则称　是$F^n$ 的一　子空间.

n 元齐次线性方程组的解集　是F^n 的一　子空间，称为齐次线性方程组的解空间.

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取下列$n \quad r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取下列$n \quad r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取下列 $n-r$ 组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2)自由未知 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取下列$n-r$组值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中的$n \quad r$ 解向

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} b_{1(r+1)} \\ b_{2(r+1)} \\ \vdots \\ b_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中的n r 解向

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} b_{1(r+1)} \\ b_{2(r+1)} \\ \vdots \\ b_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} b_{1(r+2)} \\ b_{2(r+2)} \\ \vdots \\ b_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中的n r 解向

$$\eta_1=\begin{pmatrix} b_{1(r+1)} \\ b_{2(r+1)} \\ \vdots \\ b_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} b_{1(r+2)} \\ b_{2(r+2)} \\ \vdots \\ b_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \eta_{n-r}=\begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n \quad r$ 解$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$具有以下性质：

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n \quad r \quad$解$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$具有以下性质:

①$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$线性无关.

3.6 线性方程组解的结构(1)

这n r 解$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$具有以下性质：

①$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$线性无关.

这是因为解向 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$ 是线性无关的向 组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ 的延伸组，线性无关.

3.6 线性方程组解的结构(1)

这$n \quad r$ 解$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$具有以下性质：

①$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$线性无关.

这是因为解向 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 是线性无关的向 组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ 的延伸组，线性无关.

② 中的 一 解向 都可以由$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r}$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \text{记}\xi = \begin{pmatrix} c_1 b_{1(r+1)} & c_2 b_{1(r+2)} & & c_{n-r} b_{1n} \\ c_1 b_{2(r+1)} & c_2 b_{2(r+2)} & & c_{n-r} b_{2n} \\ & \vdots & & \\ c_1 b_{r(r+1)} & c_2 b_{r(r+2)} & & c_{n-r} b_{rn} \\ & c_1 & & \\ & c_2 & & \\ & \vdots & & \\ & c_{n-r} & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \text{记}\xi = \begin{pmatrix} c_1 b_{1(r+1)} & c_2 b_{1(r+2)} & & c_{n-r} b_{1n} \\ c_1 b_{2(r+1)} & c_2 b_{2(r+2)} & & c_{n-r} b_{2n} \\ & \vdots & & \\ c_1 b_{r(r+1)} & c_2 b_{r(r+2)} & & c_{n-r} b_{rn} \\ & c_1 & & \\ & c_2 & & \\ & \vdots & & \\ & c_{n-r} & & \end{pmatrix}$$

则$\xi = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \quad + c_{n-r}\eta_{n-r}$仍是 中的解向 ，且$\eta$与$\xi$的第$r+1, r+2, \ldots, n$ 分 分别相同.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η与ξ是自由未知 取相同的值所对应的解.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η与ξ是自由未知 取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向 由自由未知 唯一确定，$\eta = \xi$.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，　中的　　解向　η与ξ是自由未知　取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向　由自由未知　唯一确定，$\eta = \xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集　中的任意一　解向　都可以由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即，　中的　　解向　η与ξ是自由未知　取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向　由自由未知　唯一确定，$\eta = \xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集　中的任意一　解向　都可以由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

$= f\eta j\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \quad + k_{n-r}\eta_{n-r}$, 其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$是任意数$g$.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η与ξ是自由未知 取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向 由自由未知 唯一确定，$\eta = \xi$.

即，齐次线性方程组(2)的解集 中的任意一 解向 都可以由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

$= f\eta j\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \quad + k_{n-r}\eta_{n-r}$, 其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$是任意数$g$.

即：系数矩阵的秩为r的n 元齐次线性方程组(2)的解空间 是由n r 线性无关的解向 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 组合得到的.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t$是 定齐次线性方程组的$t$ 解向 ，若满足：

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是　定齐次线性方程组的$t$　解向　，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性无关；

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是 定齐次线性方程组的$t$ 解向 ，若满足：(1) $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一 解向 η 都可以由$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$ 是 定齐次线性方程组的一 **基础解系**.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设$\eta_1,\eta_2,...,\eta_t$是 定齐次线性方程组的t 解向 ，若满足：(1) $\eta_1,\eta_2,...,\eta_t$线性无关；(2)齐次线性方程组的任意一解向 η 都可以由$\eta_1,\eta_2,...,\eta_t$ 线性表出.

则称$\eta_1,\eta_2,...,\eta_t$ 是 定齐次线性方程组的一 基础解系.

定 3.11 若n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

系数矩阵的秩为$r<n$，

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)

在$r < n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n \quad r$ 自由未知 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n \quad r}}$；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)

在$r < n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n-r$ 自由未知 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$；

(4)分别取 $\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，得到齐次线性方程组$n-r$ 解$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ ，即为基础解系；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵A；

(2)初等行变换将A 化为规范形阶梯形矩阵，确定A的秩r ；

(3) 在$r = n$时，方程只有0解(平凡解)

在$r < n$时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，确定$n-r$ 自由未知$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$；

(4)分别取$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，得到齐次线性方程组$n-r$ 解$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ ，即为基础解系；

(5) 齐次线性方程组的全部解为

$\{\eta | \eta = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_{n-r}\eta_{n-r}$, 其中$l_1, l_2, \ldots, l_{n-r}$是任意数$\}$.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com