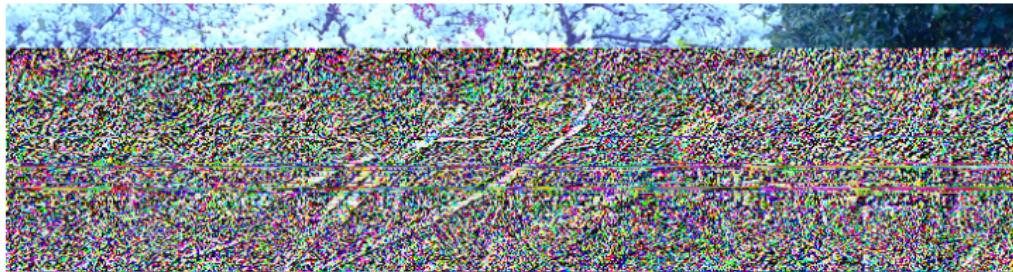


线性代数

第三章：向量空间

宿州学院 数学与统计学院



目录

1 3.6 线性方程组解的结构(1)



3.6 线性方程组解的结构(1)

n 元线性方程组

$$\begin{array}{lll} & \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} & (1) \end{array}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

 n 元线性方程组

$$\begin{array}{l} \\ \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \end{array} \quad (1)$$

与齐次线性方程组

$$\begin{array}{l} \\ \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \end{array} \quad (2)$$

有相同的系数矩阵,

3.6 线性方程组解的结构(1)

 n 元线性方程组

$$\begin{array}{l} \\ \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \end{array} \quad (1)$$

与齐次线性方程组

$$\begin{array}{l} \\ \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \end{array} \quad (2)$$

有相同的系数矩阵，称(2)为(1)导出齐次线性方程组。



3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定. 方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵

分别为

$$A = \begin{array}{ccccc} \textcircled{O} & & 1 & & \textcircled{1} \\ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} & , \quad \bar{A} = \begin{array}{ccccc} \textcircled{O} & & 1 & & \textcircled{1} \\ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \end{array} \end{array}$$



3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定. 方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵

分别为

$$A = \begin{array}{ccccc} \textcircled{O} & & 1 & & \textcircled{1} \\ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} & \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} \\ \textcircled{B} & \textcircled{C} & \textcircled{A} & \textcircled{B} & \textcircled{C} \\ @ & : & : & @ & : \\ & & A & & \end{array}, \bar{A} = \begin{array}{ccccc} a_{1n} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m1} & b_m \end{array}$$

由定 3.10, 当 A 的秩 $r(A)$ 与 \bar{A} 的秩满足 $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 时,
线性方程组(1)有无穷多解, 其导出齐次线性方程组(2)有非零
解(非平凡解).



3.6 线性方程组解的结构

方程组(2)由(1)唯一确定. 方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵

分别为

$$A = \begin{array}{ccccc} \textcircled{O} & & 1 & \textcircled{O} & 1 \\ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \textcircled{A} \end{array} & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{cc} a_{1n} & b_1 \\ a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \textcircled{A} \end{array} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}$$

由定 3.10, 当 A 的秩 $r(A)$ 与 \bar{A} 的秩满足 $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 时,
线性方程组(1)有无穷多解, 其导出齐次线性方程组(2)有非零
解(非平凡解).

若 $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$, 设 \bar{A} 经过初等行变换可以化为具
有 r 主元的规范形阶梯形矩阵 \bar{J} . 为了表述的方便, 不妨设其主
元分别在第 $1, 2, \dots, r$ 列. 即

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ @ & @ & @ & @ & @ & @ \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ @ & @ & @ & @ & @ & @ \end{matrix} \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ @ & @ & @ & @ & @ & @ \end{matrix} \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r \end{matrix} \\ @ \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

@

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ @: & : & : & : & : & : \end{array} \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ @\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\overline{J} = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ @\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

经过相同的初等行变换，系数矩阵 A 化为

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & b_{1(r+1)} & & & \\ & & b_{1n} & & \\ @ & & & & \\ @ & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ \textcircled{0} & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ @ & @ & @ & @ & @ \\ @ & @ & @ & @ & @ \\ @ & @ & @ & @ & @ \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{matrix} \textcircled{O} & & & & \\ 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ @ & & & & \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{matrix} & \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} \end{matrix} \\ & @ \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{matrix} & \textcircled{O} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ @ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{matrix} \textcircled{O} & & & & & 1 \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ @ & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & b_{1(r+1)} \\ 0 & b_{2(r+1)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & b_{r(r+1)} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & b_{1(r+1)} & b_{1n} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b_{2(r+1)} & b_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & b_{r(r+1)} & b_{rn} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ @ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

从而导出齐次线性方程组(2)的通解为

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{1(r+1)}x_{r+1} & b_{1n}x_n \\ x_2 & = & b_{2(r+1)}x_{r+1} & b_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & \\ x_r & = & b_{r(r+1)}x_{r+1} & b_{rn}x_n \end{array}$$

其中 x_{r+1}, \dots, x_n 是自由未知

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知 x_1, x_2, \dots, x_r 被自由未知 x_{r+1}, \dots, x_n 唯一确定.

3.6 线性方程组解的结构(1)

未知 x_1, x_2, \dots, x_r 被自由未知 x_{r+1}, \dots, x_n 唯一确定. 即定一组 x_{r+1}, \dots, x_n 的取值, 就能唯一地确定其余的未知 x_1, x_2, \dots, x_r . 所以, 齐次线性方程组(2)的解集可以表示为

$$\begin{array}{ccccc}
 & \textcircled{8} & & & \textcircled{1} \\
 & b_{1(r+1)}c_{r+1} & & & b_{1n}c_n \\
 & b_{2(r+1)}c_{r+1} & & & b_{2n}c_n \\
 & \vdots & & & \vdots \\
 & b_{r(r+1)}c_{r+1} & & & b_{rn}c_n \\
 & c_{r+1} & & & \text{其中 } c_{r+1}, \dots, c_n \text{ 是任意数} \\
 & c_{r+2} & & & \\
 & \vdots & & & \\
 & c_n & & &
 \end{array}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质：



3.6 线性方程组解的结构(1)

齐次线性方程组(2)解集具有性质:

(1) 设 $\begin{cases} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{cases}$, $\begin{cases} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{cases}$ 是 中中的 解向量, 则对任意

$$\begin{matrix} k_n \\ l_n \end{matrix}$$

的 $1 \leq i \leq m$, 都有

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{in}k_n = 0, a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{in}l_n = 0$$

从而

$$a_{i1}(k_1 + l_1) + a_{i2}(k_2 + l_2) + \dots + a_{in}(k_n + l_n) = 0,$$

3.6

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\begin{array}{c}
 \text{即 中 的 任 意 } \\
 \text{解 向 量 的 和} \\
 @ : A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仍} \\
 @ : A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{仍} \\
 @ : A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \textcircled{O} \\ k_1 \\ \vdots \\ @ : \end{array} & \begin{array}{c} \textcircled{O} \\ l_1 \\ \vdots \\ @ : \end{array} & \begin{array}{c} \textcircled{O} \\ k_1 + l_1 \\ \vdots \\ @ : \end{array} \\
 + & & = \\
 \begin{array}{c} k_n \\ \vdots \\ @ : \end{array} & \begin{array}{c} l_n \\ \vdots \\ @ : \end{array} & \begin{array}{c} k_n + l_n \\ \vdots \\ @ : \end{array}
 \end{array}$$

在 中.

对任意的数 l ，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \dots + a_{in}(lk_n) = 0,$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

$$\begin{array}{c}
 \text{即 中 的 任 意 } \\
 \text{解 向 的 和} \\
 @ : A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仍} \\
 @ : A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 \\
 k_1 & & l_1 & & k_1 + l_1 & \\
 \textcircled{B} & & \textcircled{B} & & \textcircled{B} & \\
 k_2 & & l_2 & & k_2 + l_2 & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 \textcircled{A} & & \textcircled{A} & & \textcircled{A} & \\
 k_n & & l_n & & k_n + l_n &
 \end{array}$$

在 中.

对任意的数 l ，都有

$$a_{i1}(lk_1) + a_{i2}(lk_2) + \dots + a_{in}(lk_n) = 0,$$

$$\begin{array}{c}
 \text{即 中 解 向 的 任 意 数 倍 } l \\
 @ : A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仍 在 中.} \\
 @ : A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 \\
 k_1 & & lk_1 & \\
 \textcircled{B} & & \textcircled{B} & \\
 k_2 & & lk_2 & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \textcircled{A} & & \textcircled{A} & \\
 k_n & & lk_n &
 \end{array}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 \mathbb{V} 中， \mathbb{V} 中任意解向量的数积仍在 \mathbb{V} 中.

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 \mathbb{V} 中， \mathbb{V} 中任意解向量的数积仍在 \mathbb{V} 中。
即，



3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 中， 中任意解向量的数积仍在 中。

即，齐次线性方程组任意解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解。

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 中， 中任意解向量的数积仍在 中。

即，齐次线性方程组任意解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解。

关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中)。

具有这种性质的 F^n 的子集称为子空间。

定义3.7

3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 中，中任意解向量的数积仍在 中。

即，齐次线性方程组任意解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解。

关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中)。

具有这种性质的 F^n 的子集称为子空间。

定义3.7 设 S 是线性空间 F^n 的非空子集，若对 F^n 的运算是封闭的 即，任意的 $\alpha, \beta \in F^n, k \in F$ ，都有 $\alpha + \beta, k\alpha \in S$ ，则称 S 是 F^n 的一子空间。



3.6 线性方程组解的结构(1)

中任意解向量的和仍在 中， 中任意解向量的数积仍在 中。

即，齐次线性方程组任意解之和仍是它的解，解的数积仍是它的解。

关于数组向量的加法和数积是封闭的(运算结果仍然在集合中)。

具有这种性质的 F^n 的子集称为子空间。

定义3.7 设 S 是线性空间 F^n 的非空子集，若 对 F^n 的运算是封闭的 即，任意的 $\alpha, \beta \in F^n, k \in F$ ，都有 $\alpha + \beta, k\alpha \in S$ ，则称 S 是 F^n 的一子空间。

n 元齐次线性方程组的解集 S 是 F^n 的一子空间，称为齐次线性方程组的解空间。

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2) 自由未知
 $\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ @ & x_{r+1} \\ @ & x_{r+2} \\ @ & \vdots \\ @ & A \end{matrix}$ 分别取下列 $n-r$ 组值:
 x_n

 $\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ @ & x_{r+1} \\ @ & x_{r+2} \\ @ & \vdots \\ @ & A \end{matrix} =$
 x_n

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2) 自由未知 x_n 分别取下列 $n-r$ 组值:

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & x_{r+1} \\ \textcircled{C} & \\ \textcircled{B} & x_{r+2} \\ \textcircled{C} & \\ @ & : \\ \textcircled{A} & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & x_{r+1} & \textcircled{B} & 1 \\ \textcircled{C} & & \textcircled{C} & 0 \\ \textcircled{B} & x_{r+2} & \textcircled{C} & \\ \textcircled{C} & & \textcircled{C} & \\ @ & : & \textcircled{A} & \\ \textcircled{A} & & \textcircled{A} & \end{matrix} = \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ \textcircled{B} & 0 \\ \textcircled{C} & \\ \textcircled{B} & \\ \textcircled{C} & \\ @ & : \\ \textcircled{A} & \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} x_n \\ x_n \\ 0 \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2) 自由未知
 $\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ x_{r+1} \\ \vdots & \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \textcircled{B} & \\ x_{r+2} \\ \vdots & \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \textcircled{C} & \\ \vdots & \end{matrix}$ 分别取下列 $n-r$ 组值:

 x_n

$$\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 & \textcircled{O} & 1 \\ x_{r+1} & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \textcircled{A} & \vdots & \textcircled{B} : \textcircled{A} & \vdots & \textcircled{B} : \textcircled{A} & \vdots : \textcircled{A} \end{matrix},$$

$x_n \quad 0 \quad 0$

3.6 线性方程组解的结构(1)

(2) 自由未知
 $\begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ x_{r+1} \\ \vdots & \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \textcircled{B} & \\ x_{r+2} \\ \vdots & \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \textcircled{A} & \end{matrix}$ 分别取下列 $n-r$ 组值:

$$\begin{matrix} x_n \\ \textcircled{O} & 1 \\ x_{r+1} \\ \vdots & \end{matrix} = \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 1 \\ \vdots & \end{matrix}, \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 0 \\ \vdots & \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \textcircled{O} & 1 \\ 0 \\ \vdots & \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} x_n \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中的 n r 解向

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1(r+1)} & \circ \\ b_{2(r+1)} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{r(r+1)} & \circ \\ 1 & \circ \\ 0 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 0 & \circ \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中的 n r 解向

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1(r+1)} & \circ \\ b_{2(r+1)} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{r(r+1)} & \circ \\ 1 & \circ \\ 0 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 0 & \circ \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1(r+2)} & \circ \\ b_{2(r+2)} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{r(r+2)} & \circ \\ 0 & \circ \\ 1 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 0 & \circ \end{pmatrix},$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

得 中 的 n r 解 向

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1(r+1)} & \circ \\ b_{2(r+1)} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{r(r+1)} & \circ \\ 1 & \circ \\ 0 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 0 & \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1(r+2)} & \circ \\ b_{2(r+2)} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{r(r+2)} & \circ \\ 0 & \circ \\ 1 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 0 & \end{pmatrix}, \dots, \eta_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{1n} & \circ \\ b_{2n} & \circ \\ \vdots & \circ \\ b_{rn} & \circ \\ 0 & \circ \\ 0 & \circ \\ \vdots & \circ \\ 1 & \end{pmatrix},$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

这 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 具有以下性质：

3.6 线性方程组解的结构(1)

这 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 具有以下性质：

① $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

3.6 线性方程组解的结构(1)

这 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 具有以下性质：

① $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

这是因为解向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是线性无关的向量组

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ @:A & @:A & @:A \end{matrix}$$

的延伸组，线性无关.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

这 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 具有以下性质：

① $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

这是因为解向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是线性无关的向量组

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ @:A & @:A & @:A \end{matrix}$$

的延伸组，线性无关.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

② 中的 一 个 解向量 都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表出.



3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \\ k_2 & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \\ \vdots & \vdots \\ k_r & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \\ c_1 & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \\ c_2 & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-r} & \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$c_{n-r}$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} \textcircled{O} & 1 \\ \vdots & \textcircled{C} \\ k_1 & \textcircled{C} \\ k_2 & \textcircled{C} \\ \vdots & \textcircled{C} \\ k_r & \textcircled{C} \\ c_1 & \textcircled{C} \\ c_2 & \textcircled{C} \\ \vdots & \textcircled{C} \\ @ & \textcircled{A} \end{pmatrix}, \text{ 记 } \xi = \begin{pmatrix} \textcircled{O} & 1 \\ \vdots & \textcircled{C} \\ c_1 b_{1(r+1)} & c_2 b_{1(r+2)} & \cdots & c_{n-r} b_{1n} \\ c_1 b_{2(r+1)} & c_2 b_{2(r+2)} & \vdots & c_{n-r} b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 b_{r(r+1)} & c_2 b_{r(r+2)} & \cdots & c_{n-r} b_{rn} \\ c_1 & c_2 & \vdots & \\ c_{n-r} & c_{n-r} & \vdots & \end{pmatrix}$$



3.6 线性方程组解的结构(1)

任取 中的一 解向

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ 记 } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 b_{1(r+1)} & c_2 b_{1(r+2)} & \cdots & c_{n-r} b_{1n} \\ c_1 b_{2(r+1)} & c_2 b_{2(r+2)} & \cdots & c_{n-r} b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 b_{r(r+1)} & c_2 b_{r(r+2)} & \cdots & c_{n-r} b_{rn} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-r} \end{pmatrix}$$

则 $\xi = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_{n-r} \eta_{n-r}$ 仍是 中的解向，且 η 与 ξ 的第 $r+1, r+2, \dots, n$ 分 分别相同。

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向量 η 与 ξ 是自由未知量 取相同的值所对应的解.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向量 η 与 ξ 是自由未知向量取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向量由自由未知向量唯一确定， $\eta = \xi$.



3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η 与 ξ 是自由未知 取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向 由自由未知 唯一确定, $\eta = \xi$.

即, 齐次线性方程组(2)的解集 中的任意一 解向 都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η 与 ξ 是自由未知 取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向 由自由未知 唯一确定, $\eta = \xi$.

即, 齐次线性方程组(2)的解集 中的任意一 解向 都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表示.

$$= f\eta j\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}, \text{ 其中 } k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意数 } g.$$

3.6 线性方程组解的结构(1)

即， 中的 解向 η 与 ξ 是自由未知 取相同的值所对应的解.

齐次线性方程组的解向 由自由未知 唯一确定, $\eta = \xi$.

即, 齐次线性方程组(2)的解集 中的任意一 解向 都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表出.

$$= f\eta j\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}, \text{ 其中 } k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意数 } g.$$

即: 系数矩阵的秩为 r 的 n 元齐次线性方程组(2)的解空间 是
由 $n - r$ 线性无关的解向 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 组合得到的.

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的 t 个解向量，若满足：

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的 t 个解向量，
若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关；



3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的 t 个解向量，
若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关；(2) 齐次线性方程组的任意一个
解向量都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出。
则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的一个 基础解系。

3.6 线性方程组解的结构(1)

定义3.8 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的 t 个解向量，若满足：(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关；(2) 齐次线性方程组的任意一个解向量都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表示.

则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 定齐次线性方程组的一个基础解系.

8 **定理 3.11** 若 n 元齐次线性方程组

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

系数矩阵的秩为 $r < n$,



3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

- (1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

- (1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；
- (2) 初等行变换将 A 化为规范形阶梯形矩阵，确定 A 的秩 r ；

3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

- (1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；
- (2) 初等行变换将 A 化为规范形阶梯形矩阵，确定 A 的秩 r ；
- (3) 在 $r = n$ 时，方程只有0解(平凡解)



3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；

(2) 初等行变换将 A 化为规范形阶梯形矩阵，确定 A 的秩 r ；

(3) 在 $r = n$ 时，方程只有0解(平凡解)

在 $r < n$ 时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，

确定 $n - r$ 自由未知 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}$ ；



3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

- (1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；
- (2) 初等行变换将 A 化为规范形阶梯形矩阵，确定 A 的秩 r ；
- (3) 在 $r = n$ 时，方程只有 0 解（平凡解）

在 $r < n$ 时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，

确定 $n - r$ 个自由未知数

$$(4) \text{ 分别取 } \begin{matrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \text{ 得到齐次线性}$$

$$\begin{matrix} x_{i_{n-r}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

方程组 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ，即为基础解系；



3.6 线性方程组解的结构(1)

求齐次线性方程组基础解系和全部解的一般步骤：

- (1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 A ；
- (2) 初等行变换将 A 化为规范形阶梯形矩阵，确定 A 的秩 r ；
- (3) 在 $r = n$ 时，方程只有 0 解（平凡解）

在 $r < n$ 时，写出规范阶梯形矩阵相应的齐次线性方程组，

确定 $n - r$ 个自由未知数 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}$ ；
 $\begin{matrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$ ， 得到齐次线性
 方程组 $n - r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ，即为基础解系；

(4) 分别取 $\begin{matrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$

(5) 齐次线性方程组的全部解为

$$f\eta_j \eta = l_1 \eta_1 + l_2 \eta_2 + \dots + l_{n-r} \eta_{n-r}, \text{ 其中 } l_1, l_2, \dots, l_{n-r} \text{ 是任意数.}$$



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email : Ning.qun@163.com