

线性代数

历年硕士研究生入学考试试题

(2000—2017)

宿州学院 数学与统计学院



目录

① 00 01

② 02 03

③ 04 05

④ 06 07

⑤ 08 09

⑥ 10 11

⑦ 12 13

⑧ 14 15

⑨ 16 17



00

1

已知方程组

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a+2 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

无解,

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



1

已知方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 1 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

无解,

则 $a = \underline{\quad}$.

答案: 1.

因为方程组无解, 系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩.

而其增广矩阵经等行变换可以化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$



$a = 1$ 时, 系数矩阵的秩为2, 增广矩阵的秩为3, 方程组无解.

2

设 n 维向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$) 线性无关, 则 n 维向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性无关的必要条件是_____.

A: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性表示;

B: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性表示;

C: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 等价;

D: 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价.



$a = 1$ 时, 系数矩阵的秩为2, 增广矩阵的秩为3, 方程组无解.

2

设 n 维向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$) 线性无关, 则 n 维向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性无关的必要条件是_____.

A: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性表示;

B: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性表示;

C: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 等价;

D: 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价.

答案: D.

A: 是向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关的充分条件, 不是必要条件;



如, 3维向量组 α_1, α_2 与 α_2, α_3 都线性无关, 但它们不能相互的线性表. 所以选择支A.; B.; C:均不正确.

3



如, 3维向量组" $\alpha_1; \alpha_2$ 与" $\alpha_2; \alpha_3$ 都线性无关, 但它们不能相互的线性表 .所以选择A.; B.; C:均不正确.

3

设矩阵A的伴随矩阵A^{*} =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 其中 I 是4阶单位矩阵, 求矩阵 B .

解: 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 两边同时取行列式, 得

$$|A||A^*| = |A|^4, |A| = |A|^3.$$

而 $|A| = 8$, 所以 $|A| = 2$.



又因为

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I,$$

$$(A - I)B = 3A,$$

$$A(A - I)B = 3AA,$$

$$(jAjl - A)B = 3jAjl,$$

$$\text{所以, } B = 6(2I_0 - A)^{-1}.$$

$$\text{而, } 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

利用 等变换法₀ 求得:

$$(2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

所以, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



01

4

设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4I = 0$, 其中 I 为单位矩阵, 则
 $(A - I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.



4

设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4I = 0$, 其中 I 为单位矩阵, 则
 $(A - I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{2}(A + 2I)$.

因为, $A^2 + A - 4I = 0$, $(A + 2I)(A - I) = 2I$,
 $[\frac{1}{2}(A + 2I)](A - I) = I$, 所以, $(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2I)$.



01

4

设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4I = 0$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $(A - I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{2}(A + 2I)$.

因为, $A^2 + A - 4I = 0$, $(A + 2I)(A - I) = 2I$,
 $[\frac{1}{2}(A + 2I)](A - I) = I$, 所以, $(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2I)$.

5

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B .



5(续)

A :合同且相似; B :合同但不相似;
 C :不合同但相似; D :不合同且不相似.



5(续)

A :合同且相似; B :合同但不相似;
 C :不合同但相似; D :不合同且不相似.

答案: A .

矩阵 A 是实对称矩阵, 一定相似且合同于对角阵, 对角元素为其特征值.

计算得, A 的特征值为4, 0, 且 A 的秩为1, 所以选 A .



01

1



01

解: 因为 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 是 $AX = 0$ 的一组基础解系,
 所以, $AX = 0$ 的 s 个线性无关的解都构成其基础解系.
 而 $\beta_k; k = 1; 2; \dots; s$ 是 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 的线性组合,
 仍是 $AX = 0$ 的解,
 所以, $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 为 $AX = 0$ 的基础解系当且仅当

$\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关

$$\text{记 } s \text{ 阶矩阵 } A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{pmatrix},$$

01

则 $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s) = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s)A$.

又因为 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关,

所以 $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 线性无关当且仅当 $jA_j \neq 0$:

而 jA_j 按第一行展开, 得 $jA_j = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s$.

所以, 当 $t_1^s \neq (-1)^s t_2^s$ 时, $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_s$ 是 $AX = 0$ 的基础解系.



7

已知二次型

$f(x_1; x_2; x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 经正交变换 $X = PY$ 可化为标准形 $f = 6y^2$, 则 $a = \underline{\quad}$.

答案: 2.

设二次型的矩阵为 A , 则6是其唯一的非零特征值,

所以, A 的行列式 $|A| = (a + 4)(a - 2)^2 = 0$ 且 A 的秩 $r(A) = 1$.

所以, $a = -4$ 或 $a = 2$.

而当 $a = -4$ 时, $r(A) = 2$, 所以 $a = 2$.



8

已知4阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 均为4维列向量, 其中 $\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$. 若 $b = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $AX = b$ 的通解.



02

8

已知4阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为4维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3$. 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $AX = \beta$ 的通解.

解: 因为 $\alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3$ 且 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,

所以, $\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, 且 A 的秩为3.

即, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个非零解,

且为 $AX = \beta$ 的基础解系.



所以, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的一解,

所以，通解为

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


9

设 $A; B$ 是同阶方阵.

- (1) 如果 $A; B$ 相似, 试证 $A; B$ 的特征多项式相等;
- (2) 举一 二阶方阵的例子, 证明(1)的逆命题不 立;
- (3) 当 $A; B$ 均为实对 矩阵时, 试证(1)的逆命题 立.



02

9

设 $A; B$ 是同阶方阵.

- (1) 如果 $A; B$ 相似, 试证 $A; B$ 的特征多项式相等;
- (2) 举一 二阶方阵的例子, 证明(1)的逆命题不 立;
- (3) 当 $A; B$ 均为实对 矩阵时, 试证(1)的逆命题 立.

证明: (1) 因为 $A; B$ 相似,

所以, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$

02



03

10

设 α 是3维列向量, α^T 是 α 的转置. 若

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha,$$

则 $\alpha^T =$ ____.



03

10

设 α 是3维列向量, α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha$,

则 $\alpha^T \alpha = \underline{\quad}$.

答案: 3.

因为, $(\alpha^T)(\alpha^T) = (\alpha^T)(\alpha^T) = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha$;

所以, $\alpha^T \alpha = \underline{3}$.



11

设3阶矩阵 $A; B$ 满足 $A^2B - A - B = I$, 其中 I 是三阶单位矩阵.

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.



11

设3阶矩阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = I$, 其中 I 是三阶单位矩阵.

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{2}$.

因为, $A^2B - A - B = I$; $(A^2 - I)B = (A + I)$,

$(A - I)(A + I)B = A + I$; $(A - I)B = I$,

所以, $|B| = \frac{1}{|A - I|} = \frac{1}{2}$.



12

设 n 维向量 $\alpha = (a; 0; \dots; 0; a)^T$, $a < 0$. I 是 n 阶单位矩阵. 矩阵
 $A = I - \alpha \alpha^T$; $B = I + \frac{1}{a} \alpha \alpha^T$. 若 A 的逆矩阵是 B , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



12

设 n 维向量 $\alpha = (a; 0; \dots; 0; a)^T$, $a < 0$. I 是 n 阶单位矩阵. 矩阵
 $A = I - \alpha \alpha^T$; $B = I + \frac{1}{a} \alpha \alpha^T$. 若 A 的逆矩阵是 B , 则 $a =$



13

设 A, B 均为 3 阶矩阵, I 为 3 阶单位矩阵.

已知 $AB = 2A + B$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 则 $(A - I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.



13

设 A, B 均为 3 阶矩阵, I 为 3 阶单位矩阵.

已知 $AB = 2A + B$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 则 $(A - I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

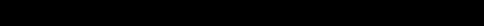
答案: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因为, $AB = 2A + B$;

$$(A - I)B = 2(A - I) + 2I; (A - I)\left[\frac{1}{2}(B - 2I)\right] = I;$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2I);$$





14

设向量组 $I: \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 可以由向量组 $II: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出，则_____.

A: $r < s$ 时，向量组 II 必线性相关；

B: $r > s$ 时，向量组 II 必线性相关；

C: $r < s$ 时，向量组 I 必线性相关；

D: $r > s$ 时，向量组 I 必线性相关.

答案: D.

向量组向量数多的被少的线性表出，多的一定线性相关.

所以，选D:.



15

3阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩为 1, 则必有 ____.

A: $a = b$ 或 $a + 2b = 0$; B: $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$;

C: $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$; D: $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.



15

3阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩为1, 则必有____.

A: $a = b$ 或 $a + 2b = 0$; B: $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$;
 C: $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$; D: $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

答案: A.

因为 $AA^* = |A|I$; $|A| = 0$, 而 A 的秩为1, $|A| = 0$,
 所以, $|A| = 0$, 且 A 至少有一 2 阶子式不为0.

而 $|A| = (a + 2b)(a - b)^2 = 0$, 所以, $a = b$ 或 $a + 2b = 0$,
 但在 $a = b$ 时, A 的秩为至多为1, $A^* = 0$, 所以 $a \neq b$.



16

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维向量, 则下列结论不正确的是____.

A: 若对任意一组不全为0的数 $k_1, \dots, k_s$,

都有 $k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关;

B: 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关,

则对任意一组不为0的数 $k_1, \dots, k_s$, 有 $k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s = 0$;

C: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是此向量组的秩为 s ;

D: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两向量线性无关.



16

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维向量, 则下列结论不正确的是_____.

A: 若对任意一组不全为0的数 $k_1, \dots, k_s$,

都有 $k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关;

B: 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关,

则对任意一组不为0的数 $k_1, \dots, k_s$, 有 $k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s = 0$;

C: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是此向量组的秩为 s ;

D: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两向量线性无关.

答案: B .

向量组线性相关是存在不全为零的系数使其组合等于零 立, 而不是所有的非零系数使其组合为零 立。





17

设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则 $A - 2I$ 的秩

与 $A - I$ 的秩的和是_____.

A: 2 B: 3; C: 4; D: 5.

答案: C.

因为 $A; B$ 相似, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$,

从而, $P^{-1}(A - 2I)P = B - 2I; P^{-1}(A - I)P = B - I$.

而 $r(B - 2I) = 3; r(B - I) = 1$, 相似矩阵有相同的秩,

所以, $r(A - 2I) + r(A - I) = 4$.



18

若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 D , 试确定数 a , 并求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = D$.



03

18

若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 D , 试确定数 a , 并求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = D$.

解: 矩阵 A 的特征方 为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & -1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ -8 & -2 & \lambda - a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2)$$

所以, A 有二重特征值 $\lambda_1 = 6$, 一重特征值 $\lambda_2 = -2$



03

将二重特征值 $\lambda_1 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

A可相似对角化的 4分] T J / F 7 7 1 0 . 4 6 0 8 T f 1 0



03

将一重特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -A \end{pmatrix} X = 0, \text{ 得 } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

属于 $\lambda_1 = 2$ 线性无关的特征向量

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



19

已知线性方程组

$$(a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$$

$$a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + (a_3 + b)x_3 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad .$$

$$\vdots$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0$$

其中 $\prod_{i=1}^n a_i \neq 0$. 试讨论 $a_1; a_2; \cdots; a_n$ 与 b 满足什么关系时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 有非零解时, 求其基础解系.

03

解：方 组的系数行列式为

$$jA_j = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_n + b \end{vmatrix}$$

将其 列都加到第一列，然后再将其第一行 1加到以下
行，计算得 $jA_j = b^{n-1}(b + \sum_{i=1}^n a_i)$.

所以，当 $b \neq 0$ 且 $b \neq -\sum_{i=1}^n a_i$ 时，方 的系数行列式 $jA_j \neq 0$ ，
方 只有零解；



03

当 $b = 0$ 或 $b = \sum_{i=1}^n a_i$ 时, 方程组的系数行列式 $|A| = 0$, 方程组有非零解.

当 $b = 0$ 时, 方程组同解于 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$,
 由于 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, 所以 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不全为 0, 不妨设 $a_1 \neq 0$,
 从而方程组此时的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a_2}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a_n}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



03

当 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0$ 时, 方程组系数矩阵的秩 $r(A) = n - 1$, 其基础解系含 1 解.

而 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 是其一非零解, 所以也是此时方程组的基础解系.



03

当 $b = \prod_{i=1}^n a_i \neq 0$ 时, 方程组系数矩阵的秩 $r(A) = n - 1$, 其基础解系含 $n - 1$ 解.

而 $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ \vdots \\ c \\ a \end{pmatrix}$ 是其一非零解, 所以也是此时方程组的基础解系.

20

设二次型

$$f(x_1; x_2; x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3; (b > 0),$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 $a; b$ 的值; (2) 利用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵

03

解: (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 特征值之和等于 A 的迹 $tr A$, 特征值之积等于 A 的行列式 $|A|$, 所以,

$$a + 2 + (2) = 1; \quad 4a - 2b^2 = 12,$$

即, $a = 1; b = 2 (b > 0)$.

(2) A 的特征多项式

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \\ \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3).$$

所以, A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$, 一重特征值 $\lambda_2 = -3$.



03

将二重特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_1 I - A)X = 0$

得： $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ ，其同解于 $x_1 - 2x_3 = 0$ ，

有基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ； $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ：

即，矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 线性无关的特征向量为 ξ_1, ξ_2 ：

将其正交单位化后得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ； $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ：



03

将特征值 $\lambda_2 = 3$ 代入齐次线性方程组 $(I - A)X = 0$ 得

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}, \text{ 有基础解系 } \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in C(A),$$

即, 矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2 = 3$ 线性无关的特征向量为 ξ_3 :

将其单位化为 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in C(A):$

取 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$





21

设向量组 I : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和

向量组 II : $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} a+2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

试问 a 为何值时, 向量组 I 与向量组 II 等价; a 为何值时, 向量组 I 与向量组 II 不等价.



03

解：以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = a+1,$$

以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = 6,$$

所以, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的秩为3.

即, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是3维数组空间的一组基, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性表出.



03

当 $a \neq 1$ 时, 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列的行列式非零, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关, 是3维数组空间的一组基,

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 可以由 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性表出. 即 I 与 II 等价.

当 $a = 1$ 时, 以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列的行列式 $=0$, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 的秩 $r(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 2 < 3$, 它不能由 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性表出, 这时 I 与 II 不等价.



03

当 $a \neq 1$ 时, 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的行列式非零, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 是3维数组空间的一组基,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 即I与II等价.

当 $a = 1$ 时, 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的行列式 $=0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$, 它不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 这时I与II不等价.

22

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵A的一

特征向量, λ 为对应的特征值, 其中 A^* 为A的伴随矩阵. 求 a, b 和 λ 的值.



03

解：因为A可逆，所以A的行列式 $|A| = 3a - 2 \neq 0$ ，且A 仍为可逆矩阵。

又因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵A 属于特征值 λ 的特征向量，所以， $\lambda \neq 0$

且， $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ； $AA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \lambda A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ；

即， $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵A属于特征值 λ^2 的特征向量。从而，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b + 3 = \lambda \\ 2b + 2 = \lambda^2 \\ 1 + b + a = \lambda^2 \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 1$ 或 $b = -2, a = 2$ ， $\lambda = \frac{jA_j}{b+3}$ ， $jA_j = 3a - 2 = 2$

当 $b = 1$ 时， $\lambda = \frac{jA_j}{b+3} = 1$ ，当 $b = -2$ 时， $\lambda = \frac{jA_j}{b+3} = 4$ 。



23

已知平面上三条不同直线的方程 分别是

$$l_1: ax+2by+3c=0; \quad l_2: bx+2cy+3a=0; \quad l_3: cx+2ay+3b=0;$$

证明：这三条直线交于一点的 必要条件是 $a+b+c=0$.



23

已知平面上三条不同直线的方程 分别是

$$l_1: ax+2by+3c=0; \quad l_2: bx+2cy+3a=0; \quad l_3: cx+2ay+3b=0;$$

证明：这三条直线交于一点的 必要条件是 $a+b+c=0$.

证明：(充分性)

已知 $a+b+c=0$ ，要证明三条直线交于一点，只要证明，

$$\begin{cases} ax + 2by = 3c \\ bx + 2cy = 3a \\ cx + 2ay = 3b \end{cases} \text{ 有唯一的解.}$$



由于 $a + b + c = 0$, 所以方程组同解于

$$\begin{cases} ax + 2by = 3c \\ bx + 2cy = 3a \end{cases}$$

方程组的系数行列式为 $jA_j = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 2b^2$.

由 $a + b + c = 0$ 得 $b^2 = (a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$,

$2ac = b^2 - a^2 - c^2$, $jA_j = (a^2 + b^2 + c^2)$.

又因为 l_1 是直线的方程, 所以 $a; b; c$ 不全为零,

$jA_j \neq 0$, 方程组有唯一解. 即, 三条直线交于一点.

(必要性)

已知三条直线交于一点, 要证明 $a + b + c = 0$.





24

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA = 2BA + I$, 其中

A 为 A 的伴随矩阵, I 是单位矩阵, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.



24

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA = 2BA + I$, 其中 A 为 A 的伴随矩阵, I 是单位矩阵, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\quad}$.

答案: $\frac{1}{9}$.

因为 $|A| = 3$; $A^* = |A|I = 3I$, 所以,

$$ABA^* = 2BA^* + A; 3AB = 6B + A,$$

$$|3A - 6I||B| = |A|;$$

$$\text{所以, } |B| = \frac{1}{9}.$$



25

设 A 为3阶方阵, 将 A 的第1列与第2列交换得 B , 再把 B 的第2列加到第3列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 是: ____.

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案: D.



04

由 等变换与 等矩阵之间的关系, Q 为交换第1列与第2列,
然后将第2列加到第3列对应的 等矩阵之积. 即,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



04

由 等变换与 等矩阵之间的关系, Q 为交换第1列与第2列,
然后将第2列加到第3列对应的 等矩阵之积. 即,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26

设 $A; B$ 是满足 $AB = 0$ 的任意两 非零矩阵, 则必有_____.

- A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
- B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;
- C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
- D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.



答案: A.

因为 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合, AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合.

由 $AB = 0$ 且 A, B 均为非零矩阵, 则, 存在非零系数使得 B 的行向量组合为零, 也存在非零系数使得 A 的列向量组合为零, 所以, 选(A.).



27

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases}$$

问 a 取何值时，方程组有非零解，并求通解。



27

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases}$$

问 a 取何值时，方程组有非零解，并求通解。

解：方程组的系数行列式为



04

$$jA_j = \begin{pmatrix} (1+a) & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 2 & & 2+a & 2 & & 2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & n & 1 & n & 1 & n & 1+a & n & 1 \\ n & & n & & n & & n & & n+a \end{pmatrix}$$

将其最后一列 (1) 加到最后前面 列, 得

$$jA_j = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a & n & 1 \\ a & a & a & & a & n+a \end{pmatrix}$$

再将其 行都加到最后一行, 得

04

$$\begin{aligned}
 jAj &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = a^{n-1} \left[\frac{n(n+1)}{2} + a \right].
 \end{aligned}$$

所以当 $a = 0$ 或 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $jAj = 0$, 方程组有非零解.
 $a = 0$ 时, 方程组同解于 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$,



04

基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \eta_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$

通解为 $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-1} \eta_{n-1}$; $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 是任意数 g .

当 $a = \frac{n(n+1)}{2}$ 时, 对方组的系数矩阵 A 实施等行变换,

将第一行 k 加到第 k 行, $k = 2, 3, \dots, n$, 得



04

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)a & 0 & 0 & a & 0 \\ na & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

再将第 k 行 $\times \frac{1}{a}$, $k = 2, 3, \dots, n$, 得

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sum 2x_1 + x_2 = 0$$
...
 22
$$(n-1)x_1 + x_{n-1} = 0$$
$$nx_1 + x_n = 0$$

，基础解系为

0	1
1	0
2	0
:	:
@	A
n	

此时，方程组的通解为 f_k

0 1
1 2
⋮
A
n

jk 为任意数 g .



28

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & a & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一二重根，

求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.



28

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一二重根，

求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化。

解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda - 1 & -4 & -3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a)$$

所以，

$a = 2$ 时， A 有二重特征值 $\lambda_1 = 2$ ，一重特征值 $\lambda_2 = 6$ ；



04

$a = \frac{2}{3}$ 时, A 有二重特征值 $\lambda_1 = 4$, 一重特征值 $\lambda_2 = 2$.

$a = 2$ 时, 将二重特征值 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有两 线性无关的解, A 可相似对角化.

$a = \frac{2}{3}$ 时, 将二重特征值 $\lambda_1 = 4$ 代入齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

只有一 线性无关的解, A 不可相似对角化.



29

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为3维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$,

若矩阵A的行列式 $|A| = 1$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.



29

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为3维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,
 $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$,
 若矩阵A的行列式 $|A| = 1$, 则 $|B| = \underline{\quad}$.

答案: 2 . 0

$$\text{因为 } B = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ A \end{matrix}, \quad |B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2.$$



30

设 λ_1, λ_2 均是矩阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别是 α_1, α_2 , 则, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是: ____.

A. $\alpha_1 \neq 0$; B. $\alpha_2 \neq 0$; C. $\lambda_1 = 0$; D. $\lambda_2 = 0$.



30

设 λ_1, λ_2 均是矩阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别是 α_1, α_2 , 则, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是: ____.

A. $\alpha_1 \neq 0$; B. $\alpha_2 \neq 0$; C. $\alpha_1 = 0$; D. $\alpha_2 = 0$.

答案: B .

因为任何方阵属于不同特征值的特征向量线性无关. 所以

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0:$$

$$\text{而 } y_1 \alpha_1 + y_2 A(\alpha_1 + \alpha_2) = (y_1 + y_2 \alpha_1) \alpha_1 + y_2 \alpha_2;$$

所以, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关当且仅当

“由 $(y_1 + y_2 \alpha_1) \alpha_1 + y_2 \alpha_2 = 0$ 可以得到 $y_1 = y_2 = 0$.”



又因为

$(y_1 + y_2 - 1) - 1 + y_2 - 2 - 2 = 0$, $y_1 + y_2 - 1 = y_2 - 2 = 0$,
所以选(B.).



又因为

$(y_1 + y_2 \quad 1) \quad 1 + y_2 \quad 2 \quad 2 = 0$, $y_1 + y_2 \quad 1 = y_2 \quad 2 = 0$,
所以选(B.).

31

设 A 是 n ($n > 1$)阶可逆矩阵, 交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B , $A; B$ 分别是 $A; B$ 的伴随矩阵, 则_____.

- A. 交换 A 的第1列与第2列得 B ;
- B. 交换 A 的第1行与第2行得 B ;
- C. 交换 A 的第1列与第2列得 B ;
- D. 交换 A 的第1行与第2行得 B .

答案: C .

设 P 是交换第1行与第2行对应的 等矩阵, 则 $P^{-1} = P$,

且 $B = PA$. 而,

$$jBj = jAjjPj = jAj, \quad B^{-1} = A^{-1}P^{-1},$$

$$jBj^{-1}B = jAj^{-1}A P^{-1}, \quad B = A P,$$

P 在右侧, 交换 A 的列.



答案: C .

设 P 是交换第1行与第2行对应的 等矩阵, 则 $P^{-1} = P$,

且 $B = PA$. 而,

$$jBj = jAjjPj = jAj, \quad B^{-1} = A^{-1}P^{-1},$$

$$jBj^{-1}B = jAj^{-1}A P^{-1}, \quad B = A P,$$

P 在右侧, 交换 A 的列.

32

已知二次型

$f(x_1; x_2; x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2.

(1)求 a 的值; (2)求正交变换 $X = QY$, 把 $f(x_1; x_2; x_3)$ 化为标准形; (3)求方程 $f(x_1; x_2; x_3) = 0$ 的解.

解: (1) 二次型 $f(x_1; x_2; x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 且 } A \text{ 的秩 } r(A) = 2.$$

所以, A 的行列式 $|A| = 0$, 即,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1+a \\ 1+a & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4a = 0, \quad a = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1+a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a(1+a) = 1 - a - a^2 = 0$$

所以, $a = 0$ 时, 二次型的秩为 2.

(2) 当 $a = 0$ 时, A 有两 不同的特征值 $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2$.



05

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

将 $\lambda_2 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$, 得属于

特征值 $\lambda_2 = 2$ 的正交的特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

单位化得 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



05

$$\text{取 } Q = \begin{matrix} 0 \\ B \\ B \\ B \end{matrix}$$



33

已知3阶矩阵A的第一行是(a b c); a; b; c不全为0, 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 是数, 且 } AB = 0.$$

求线性方程组 $AX = 0$ 的通解.

解: 因为 $AB = 0$, 所以矩阵B的列向量是其次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 秩满足 $r(A) + r(B) = 3$.

而 $r(A) = 1$, 所以, $r(B) = 2$.

又因为 $k \neq 9$ 时, $r(B) = 2$, $k = 9$ 时, $r(B) = 1$,



05

所以, 当 $k \neq 9$ 时, $r(A) = 1$

$AX = 0$ 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix},$

通解是 $l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}; m$ 为任意数 g .

当 $k = 9$ 时, $r(B) = 1$, 则 $r(A) = 1$ 或 $r(A) = 2$.

若 $r(A) = 1$, 方程组 $AX = 0$ 同解于 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.



05

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ A \end{pmatrix}$ 是其一解. $a + 2b + 3c = 0$.

又因为 a, b, c 不全为 0, 不妨设 $a \neq 0$, 从而

$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ A \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的另一解, 且与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ A \end{pmatrix}$ 线性无关,

即, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ A \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ A \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系,



05

$AX = 0$ 的通解是 $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$; m 为任意数 g .

若 $r(A) = 2$, 则 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系,

通解为 $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ 为任意数 g :



34

确定数 a , 使得向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

可以由向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性表

, 但向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 不能由 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 线性表 .



05

解: 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为列, 构造 3×6 矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}, \quad \text{等行变换, 化为阶梯形,}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & a & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 & a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2 & a & a^2 & 0 & 6+3a & 2+4a \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ A \end{matrix},$$

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所在的列都有主元, 线性无关, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 不符合要求。

所以, 只要讨论 $a = 1$ 或者 $a = 2$ 的情况。



05

$$a = 1 \text{ 时, 阶梯形矩阵为 } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

满足: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

$$a = 2 \text{ 时, } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

满足: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

$a = 2$ 不符合要求. 所以, $a = 1$.



35

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, I 是 2 阶单位矩阵,

矩阵 B 满足 $BA = B + I$, 则 B 的行列式为 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.



35

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, I 是 2 阶单位矩阵,

矩阵 B 满足 $BA = B + I$, 则 B 的行列式为 $|B| = \underline{\quad}$.

答案: 2.

因为 B 满足 $BA = B + I$, 所以, $|B||A - I| = |B + I|$,
而 $|A - I| = 2; |B + I| = 4$, 所以, $|B| = 2$.



36

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列选项正确的是: ____.

- A. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性相关;
- B. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性无关;
- C. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性相关;
- D. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性无关.



36

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列选项正确的是: ____.

- A. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性相关;
- B. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性无关;
- C. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性相关;
- D. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_r$ 线性无关.

答案: A.

因为由 $x_1\alpha_1 + \dots + x_r\alpha_r = 0$, 可以得到

$$x_1A\alpha_1 + \dots + x_rA\alpha_r = A(x_1\alpha_1 + \dots + x_r\alpha_r) = 0.$$

所以, 选A:



37

设 A 是3阶矩阵，将 A 的第2行加到第1行得 B ，将 B 的第1列的1倍

加到第2列得 C ，记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则_____.

A. $C = P^{-1}AP$; B. $C = PAP^{-1}$; C. $C = P^TAP$; D. $C = PAP^T$:



37

设 A 是3阶矩阵, 将 A 的第2行加到第1行得 B , 将 B 的第1列的 1倍

加到第2列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则____.

A. $C = P^{-1}AP$; B. $C = PAP^{-1}$; C. $C = P^TAP$; D. $C = PAP^T$:

答案: B.

因为 P 是第2行加到第1行对应的 等矩阵, P^{-1} 是第1列的 1倍加到第2列对应的 等矩阵, 而对矩阵实施 等行变换就相当于在矩阵的左侧 上相应的 等矩阵, 对矩阵实施 等列变换就相当于在矩阵的右侧 上相应的 等矩阵.



38

$$\begin{matrix} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有3线性

$$\cdot$$

$$ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1$$

性无关的解.

(1)证明方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2)求 $a; b$ 的值以及方程组的通解.



38

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有3 线

性无关的解.

(1)证明方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2) 求 a, b 的值以及方程组的通解.

解: (1) 因为线性方程组有 3 个线性无关的解,

记为 $X_1; X_2; X_3$. 则 $X_1 - X_2; X_1 - X_3$ 是其导 齐次线性方程组的 2 个线性无关的解.

所以, 导 齐次线性方 组的基础解系所含解的 数 2,



06

即, $r(A) = 2, r(A) = 2$.

又, A 有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以, $r(A) = 2$.

所以, $r(A) = 2$:

(2) 将方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2a & 4a & b & 5 & 4 & 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}$$



$$\text{方 组同解于} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

方 组同解于

$$\vdots \quad x_2 \quad x_3 + 5x_4 \quad = \quad 3$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 导组的基础解系是
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

有特解:

通解为:

39

设3阶实对 矩阵 A 的 行元素和均为3, 向量

1



39

设3阶实对称矩阵A的各行元素和均为3, 向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是线性方程组 } AX = 0 \text{ 的两个解.}$$

(1) 求A的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵Q和对角矩阵B, 使得 $Q^T A Q = B$.

解: (1) 因为 α_1, α_2 是线性方程组 $AX = 0$ 的解,

所以, $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1; A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$,

即, 0 是矩阵A的一个特征值, 且 α_1, α_2 是矩阵A属于特征值0的两个线性无关的特征向量.



06

又因为A每一行的元素之和均为3，所以，

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即, } 3 \text{ 是 } A \text{ 的一特征值,}$$

$$\text{且, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是 } A \text{ 属于特征值 } 3 \text{ 的特征向量.}$$

(2) 将 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化, 得A属于特征值0的两个正交的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 单位化得 } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$



06

将 A 单位化得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

构造正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{6}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix},$

$$\text{则 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$



40

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 则 A^3 的秩为 $r(A^3) = \underline{\hspace{2cm}}$.



40

设矩阵 $A =$

0			1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

41

设向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是: ____.

- A. $\alpha_1 - \alpha_2; \alpha_2 - \alpha_3; \alpha_3 - \alpha_1$; B. $\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_3 + \alpha_1$;
 C. $\alpha_1 - 2\alpha_2; 2\alpha_2 - 2\alpha_3; 2\alpha_3 - \alpha_1$; D. $\alpha_1 + 2\alpha_2; 2\alpha_2 + 2\alpha_3; \alpha_3 + 2\alpha_1$.



41

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是: ____.

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$;
 C. $\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$; D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

答案: A.

因为, $(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_3, \alpha_1) = 0$.

所以, 选A:



42

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ____.

- A. 合同且相似; B. 合同但不相似;
C. 不合同但相似; D. 不合同且不相似.



42

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ____.

- A. 合同且相似; B. 合同但不相似;
C. 不合同但相似; D. 不合同且不相似.

答案: B.

因为 A 的 2 阶顺序主子阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是正定的, 且 $jA_j = 0$,

所以, A 是秩为 2 的半正定矩阵, A 与 B 合同.

又因为, A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^2$,

所以, A 与 B 的特征值不相同, A 与 B 不相似.

43

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程组

$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有的公共解.



43

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程组

$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有的公共解.

解: 因为两个线性方程组有公共解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$

有解, 且其解即为公共解.

又因为其增广矩阵经过等行变换化为阶梯阵得到



$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & & & & & 1 & 0 & & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 1 & 2 & a & 0 & & 0 & 1 & a & 1 & 0 \\
 1 & 4 & a^2 & 0 & & 0 & 0 & 1 & a & a & 1 \\
 1 & 2 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) & &
 \end{array}$$

所以它们有 共解当且仅当 $a = 1$ 或 $a = 2$.

当 $a = 1$ 时, 它们的 共解为

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 9 \\
 k & \\
 0 & j8k \\
 k &
 \end{array}$$



07

$a = 2$ 时, 它们的 共解为

0	1
0	C
1	C
1	A
1	



07

$a = 2$ 时, 它们的共解为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

44

设3阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = -2$.

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 属于 λ_1 的一特征向量.

记 $B = A^5 - 4A^3 + I$, 其中 I 为3阶单位阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值的特征向量; (2) 求矩阵 B .

解: (1) 因为 α_1 是矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量,

所以, $A\alpha_1 = \alpha_1; A^5\alpha_1 = \alpha_1; A^3\alpha_1 = \alpha_1$.

所以, $B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = 2\alpha_1$,

即, α_1 是矩阵 B 属于特征值 2 的特征向量.

设 $\alpha_2; \alpha_3$ 为矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_2; \lambda_3$ 的特征向量.

则, $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2; A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3, A^5\alpha_2 = \lambda_2^5\alpha_2$,

$A^3\alpha_2 = \lambda_2^3\alpha_2, A^5\alpha_3 = \lambda_3^5\alpha_3, A^3\alpha_3 = \lambda_3^3\alpha_3$. 所以,

$B\alpha_2 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_2 = \lambda_2^5\alpha_2 - 4\lambda_2^3\alpha_2 + \alpha_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha_2$;

即 $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 \neq 0$ 是矩阵 B 属于特征值 1 的特征向量.

由于 A 是对角矩阵, 所以 B 也是对角矩阵.

对角矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.



07

设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为 B 属于特征值 1 的特征向量,

则, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 所以,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 B 属于特征值 1 的线性无关的特征向量.

所以, B 属于特征值 1 的全部特征向量为

$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k, j \in \mathbb{R}, k, j \neq 0$.



属于特征值1的全部特征向量为

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 不全为零}$$

(2) 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,



07

求得 $P^{-1} =$

	0			1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

所以, C



45

设 A 为2阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的2维向量,
 $A\alpha_1 = 0; A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.



45

设 A 为2阶矩阵. α_1, α_2 为线性无关的2维向量,
 $A\alpha_1 = 0; A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

答案: 1 .

因为 α_1, α_2 为线性无关的2维向量, 所以 $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$:

又, $A\alpha_1 = 0, A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$,

所以, α_1 是矩阵 A 属于特征值0的特征向量,

$2\alpha_1 + \alpha_2$ 是矩阵 A 属于特征值1的特征向量.

再, A 是2阶矩阵, 所以, A 只有两 特征值,

从而, A 的非零特征值为1.



08

46

 $= \underline{\hspace{1cm}}.$ 

46

3阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3$ ；且 A 的行列式 $|A| = 24$ ，
则 $\lambda_1 =$ _____.

答案：4 .

因为方阵的行列式等于特征值之积，

即， $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 2 \cdot 3 = 24$. 所以， $\lambda_1 = 4$.



08

46

3阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 其中 $1 \notin 2, 3$; 且 A 的行列式 $|A| = 24$, 则 $|A^{-1}| =$ ____.

答案: 4 .

因为方阵的行列式等于特征值之积,

即, $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 24$. 所以, $|A| = 24$. 所以, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{24}$.

47

设3阶矩阵 A 的特征值互不相同. 若 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 的秩 $r(A) =$ ____.



46

3阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 其中 $1 \notin \{2, 3\}$; 且 A 的行列式 $|A| = 24$, 则 $|A^{-1}| =$ ____.

答案: 4 .

因为方阵的行列式等于特征值之积,

即, $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 24$. 所以, $|A| = 24$. 所以, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{24}$.

47

设3阶矩阵 A 的特征值互不相同. 若 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 的秩 $r(A) =$ ____.

答案: 2 .

因为 A 的特征值互不相同, 所以 A 相似于对角阵.



又因为相似矩阵有相同的秩和行列式，且对角阵的行列式等于
对角元的积，

所以， A 有一零特征值和2个非零特征值，从而 A 的
秩 $r(A) = 2$.



又因为相似矩阵有相同的秩和行列式, 且对角阵的行列式等于
对角元的 积,

所以, A 有一 零特征值和2 非零特征值, 从而 A 的
秩 $r(A) = 2$.

48

设 A 是 n 阶方阵, I 是 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$; 则____.

- A. $I - A$ 不可逆, $I + A$ 不可逆; B. $I - A$ 不可逆, $I + A$ 可逆;
C. $I - A$ 可逆, $I + A$ 可逆; D. $I - A$ 可逆, $I + A$ 不可逆.



又因为相似矩阵有相同的秩和行列式，且对角阵的行列式等于
对角元的 积，

所以， A 有一 零特征值和2 非零特征值，从而 A 的
秩 $r(A) = 2$.

48

设 A 是 n 阶方阵， I 是 n 阶单位矩阵.若 $A^3 = 0$;则____.

A. $I - A$ 不可逆， $I + A$ 不可逆； B. $I - A$ 不可逆， $I + A$ 可逆；
C. $I - A$ 可逆， $I + A$ 可逆； D. $I - A$ 可逆， $I + A$ 不可逆.

答案： C .

$$(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I,$$

$$(I + A)(I - A + A^2) = I - A^3 = I.$$



49

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 在实数域上与 A 合同的矩阵是_____.

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
 C. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.



49

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$, 在实数域上与 A 合同的矩阵是_____.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$; B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A$;
 C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$; D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$.

答案: D.

因为实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$ 的合同标准型是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$;

08

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A \text{ 的合同标准型是 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A \text{ 的合同标准型是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A \text{ 的合同标准型是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A \text{ 的合同标准型是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A.$$



50

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a & 0 \end{pmatrix}$,

方程组 $AX = B$, 其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

50(续)

- (1) 证明 $jAj = (n + 1)a^n$;
- (2) a 为何值时, 方程组有唯一解, 并求唯一解 X ;
- (3) a 为何值时, 方程组有无穷多解, 求通解.



解: (1)归纳法. 记 n 阶矩阵 A 的行列式为 $D_n = |A|$. $n = 1$ 时, 结论显然 立.

假设对阶数 $k \leq n$ 的矩阵 A , 都有 $D_k = (k + 1)a^k$.

则, 对 $n + 1$ 阶矩阵 A 的行列式 D_{n+1} , 按最后一列展开, 得递推关系式

$$D_{n+1} = 2aD_n - a^2D_{n-1} =$$

$$2a[(n + 1)a^n] - a^2[(n - 1 + 1)a^{n-1}] = (n + 2)a^{n+1}.$$

即, 对 $n + 1$ 阶矩阵 A , 结论仍然 立.

由归纳法原理, 结论对所有的矩阵 A 均 立.

(2)当 $a \neq 0$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解.



记 jA_kj 为 jA_j 的第 k 列用 B 替换所得到的行列式, 即

$$jA_kj = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2a & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a^2 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 2a & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & a^2 & 2a \end{vmatrix}.$$

08

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}^{(n-1)} \begin{pmatrix} (n-1) & (n-1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= (-1)^{k+1} (a^2)^{k-1} D_{n-k} = (-1)^{k+1} (a^2)^{k-1} (n-k+1) a^{n-k},$$

k





08

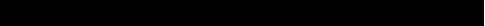
方程组的通解为 $\vec{x} = \vec{x}_0 + k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3$

51

设 A 为 3 阶矩阵， α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

(2) 记 $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列向量的矩阵，求 $P^{-1}AP$.



08

(2) 因为

$$AP = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix};$$

所以,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}:$$



52

设 $A = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T$; α, β 为三维列向量, α^T 为向量 α 的转置, β^T 为向量 β 的转置.

证明: (1) $r(A) \leq 2$; (2) 若 α, β 线性相关, 则 $r(A) < 2$.



52

设 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T$ ， α, β, γ 为三维列向量， α^T 为向量 α 的转置， β^T 为向量 β 的转置。

证明：(1) $r(A) \leq 2$ ；(2) 若 α, β 线性相关，则 $r(A) < 2$ 。

证明：(1) 因为 α, β, γ 是三维列向量，所以，三阶方阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T$ 的列都是 α^T 与 β^T 的数积， $r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T) \leq 1$ ，同样， $r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T) \leq 1$ 。

又因为两矩阵和的秩不大于它们秩的和，所以，

$$r(A) = r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T) \leq r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T) + r(\begin{pmatrix} \gamma \end{pmatrix}^T) \leq 2;$$

(2) 若 α, β 线性相关，则其中一向量可以由另一向量线性表示。不妨设 $\beta = k\alpha$ ，则 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T = (\alpha \quad k\alpha)^T = k^2(\alpha \quad \alpha)^T$ ，所以，



53

若3维向量 α 满足 $\alpha^T A \alpha = 2$, 其中 A 为 α 的转置. 则矩阵 A 的非零特征值为_____.



53

若3维向量 α 满足 $A\alpha = 2\alpha$, 其中 A^T 为 A 的转置. 则矩阵 A^T 的非零特征值为_____.

答案: 2 .

因为, 矩阵 A^T 的秩为1, 所以, A^T 只有一 非零特征值.

又因为, 矩阵 A 的特征值之和等于其主对角元之和,

而 A^T 的主对角元之和等于 $\text{tr}(A) = 2$,

所以, A^T 的非零特征值为2.



54

设 α 为 3 维列向量, α^T 为 α 的转置.

若 α^T 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T = \underline{\hspace{2cm}}$.



54

设 α 为 3 维列向量, α^T 为 α 的转置.

若 α^T 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T \alpha = \underline{\quad}$.

答案: 2.

因为, 相似矩阵有相同的迹.

且, $\alpha^T \alpha$ 等于 α^T 的对角元素之和,

所以, $\alpha^T \alpha$ 等于 α^T 的迹 = 2.



55

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵是 ____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;



55

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵是_____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

答案: A.



因为,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}$$



56

设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别是矩阵 A, B 的伴随矩阵,

若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是_____.

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$;
 C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$.



56

设 A, B 均为2阶矩阵, A^*, B^* 分别是矩阵 A, B 的伴随矩阵,

若 $|A| = 2; |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是_____.

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$;
 C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$.

答案: B .



因为对任意可逆矩阵 C , $C^{-1} = jCj^{-1}$, 又因为,

$$\begin{aligned}
 @ \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} &= @ \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} A = @ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{jBj} B \\ \frac{1}{jAj} A & 0 \end{pmatrix} A \\
 &= \frac{1}{jAj jBj} @ \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \\
 @ \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} A &= jAj jBj @ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{jBj} B \\ \frac{1}{jAj} A & 0 \end{pmatrix} A \\
 &= @ \begin{pmatrix} 0 & jAj B \\ jBj A & 0 \end{pmatrix} A.
 \end{aligned}$$



57

设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置,

$$\text{且 } P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

若 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = \underline{\hspace{2cm}}$.

- A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
 C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

09

答案: A .0 1

因为 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}$,

所以, $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}$.



58

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 求满足 $A_2 = 1; A^2_3 = 1$ 的所有向量 $2; 3$;

(2) 对(1)中的任意向量 $2; 3$; 证明: $1; 2; 3$ 线性无关.



58

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{求 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

- (1) 求满足 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的所有向量 X ;
 (2) 对(1)中的任意向量 X ; 证明: X 线性无关.

解: (1) 解方程组 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对方 A 组的增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初等行变换化为

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



所以, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}$, 其中, k_1 为任意数.

又因为, $A^2 = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}$, 所以,

方程组 $A^2 X = 0$ 的增广矩阵经过等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix},$$



所以, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中, $k_2; k_3$ 为任意数.

(2) 因为对任意的 $k_1; k_2; k_3$, 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} & k_2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}k_1 & k_2 \\ 0 & k_1 & k_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

所以, 对任意的 $\alpha_2; \alpha_3$, 都有 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关.



59

设二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$:

- (1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;
- (2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.



59

设二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$:

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

$$(1) \text{二次型 } f \text{ 的矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

特征多项式 $| \lambda I - A | = (\lambda - a)(\lambda - a - 2)(\lambda - 1)$.

所以, A 的所有特征值为 $a; a+2; a-1$:

(2) 因为二次型的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$,

所以, A 的秩为 2, 且正惯性指数为 2,

即, A 有两 正的特征值, 一 0 特征值. 从而, $a = 1$:



60

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2a & 3 \end{pmatrix};$$

若存在3阶非零矩阵 B , 使得 $AB = 0$,

(1)求 a 的值; (2)求方程组 $AX = 0$ 的通解.



60

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2a & 3 \end{pmatrix};$$

若存在3阶非零矩阵 B ，使得 $AB = 0$ ，

(1)求 a 的值；(2)求方程组 $AX = 0$ 的通解.

解：(1)因为存在非零矩阵 B ，使得 $AB = 0$ ，

所以， A 的行列式 $|A| = 0$.而， $|A| = a(a-2)$ ，

所以， $a = 0$ 或 $a = 2$ ：

(2) $a = 0$ 时， $AX = 0$ 同解于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

通解为 $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 2k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} C_j k \text{ 为任意数}$.

$a = 2$ 时, $AX = 0$ 同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

通解为 $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ k_1 \\ k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} C_j k_1 \text{ 为任意数}$.



61

设3阶矩阵A的特征值为1, 1, 2, 对应的特征向量依次为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1)求矩阵A; (2)求 A^{2009} .



61

设3阶矩阵A的特征值为1, 1, 2, 对应的特征向量依次为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1)求矩阵A; (2)求 A^{2009} .

(1)3阶方阵A有三 线性无关的特征向量 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$,

以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 为列构造可逆矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$



$$\text{则, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ A \\ A \end{matrix}, \text{ 从而,}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ A \\ A \end{matrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ A \\ A \end{matrix}.$$



$$\begin{aligned}
 (2) A^{2009} &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2^{2008} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2008} & 0 & \frac{1}{2} & 2^{2008} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



62

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, I 是 m 阶单位矩阵,
若 $AB = I$, 则_____.

- A.秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$; B.秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$;
C.秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$; D.秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.



62

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, I 是 m 阶单位矩阵,
若 $AB = I$, 则_____.

- A.秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$; B.秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$;
C.秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$; D.秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

答案: A .

因为, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵,

所以, $r(A) \leq m$; $r(B) \leq m$,

而, $m = r(AB) \leq r(A)$; $m = r(AB) \leq r(B)$,

所以, $r(A) = r(B) = m$.



63

设 A 是 4 阶对 矩阵, 且 $A^2 + A = 0$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;

答案: D .

因为, A 相似于对角阵 D ,

所以, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = D$, 所以,

$$D^2 + D = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = P^{-1}(A^2 + A)P = 0.$$



10

答案: D .

因为, A 相似于对角阵 D ,

所以, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = D$, 所以,

$$D^2 + D = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = P^{-1}(A^2 + A)P = 0.$$

64

$$\text{设 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ a \end{pmatrix},$$

若由 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 形成的向量空间的维数是2, 则 $a = \underline{\quad}$.

10

答案: 6

因为由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 形成的向量空间的维数是2, 也就是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩是2.

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵, 并施行等行变换, 化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩是2, $a = 6$.



10

65

65

设向量组 $I: \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_r$ 可以由向量组 $II: \beta_1; \beta_2; \dots; \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是_____.

- A. 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$;
- B. 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$;
- C. 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$;
- D. 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

答案: A

向量组向量数多的被向量数少的线性表示, 多的一定线性相关.

且逆命题不立.



66

设 $A; B$ 为3阶矩阵, 且 $|A| = 3; |B| = 2; |A^{-1} + B| = 2$,
则 $|A + B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.



66

设 $A; B$ 为3阶矩阵, 且 $jAj = 3; jBj = 2; jA^{-1} + Bj = 2$,
 则 $jA + B^{-1}j = \underline{\hspace{1cm}}$.

答案: 3

因为, $jAjjA^{-1} + Bj = jA(A^{-1} + B)j = jI + ABj = 6$,

且, $jA + B^{-1}jjBj = j(A + B^{-1})Bj = jAB + Ij = 6$,

所以, $jA + B^{-1}j = 3$.



67

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

已知线性方程组 $AX = b$ 存在两个不同的解.

(1) 求 a ; (2) 求方程组 $AX = b$ 的通解.



67

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

已知线性方程组 $AX = b$ 存在两个不同的解.

(1)求 a ; (2)求方程组 $AX = b$ 的通解.

$$\text{解: (1) 方程组的增广矩阵 } \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

经等行变换, $\bar{A}$ 化为



10

$$\overline{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$AX = b$ 有两不同的解, 所以,

$$\begin{cases} 1 - a = 0 & (a = 1 \text{ 方组无解}) \\ 1 - a + 1 = 0 & (a = 0 \text{ 方组解唯一}) \end{cases} \therefore a = 2$$

$$(2) \text{ 方组同解于: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$



10

有一特解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}$, 导 组基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}$,

通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ C \\ A \end{pmatrix}$ j, k 是任意数.



68

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型是 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第三列是 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A ;

(2) 证明 $A + I$ 是正定矩阵, 其中 I 是 3 阶单位矩阵.



68

已知二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = X^T A X$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型是 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第三列是 $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. 求矩阵 A .

(1) 求矩阵 A ;

(2) 证明 $A + I$ 是正定矩阵, 其中 I 是 3 阶单位矩阵.

解: (1) 因为 Q 是正交矩阵,

所以, Q 的列向量是两两正交的单位向量.



10

假设 Q 的未知列向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则,

$$\frac{p_2}{2} x_1 + 0 x_2 + \frac{p_2}{2} x_3 = 0 \quad (\text{列向量相互正交})$$

$$: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (\text{列向量为单位向量})$$

可以解得 Q 的另外两列向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_2}{2} \\ 0 \\ \frac{p_2}{2} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{所以, } Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_2}{2} & 0 & \frac{p_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{p_2}{2} & 0 & \frac{p_2}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ 且 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



所以, $A + I$ 相似于(合同于) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 是正定矩阵.



69

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 若第1列为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的正交矩阵 Q , 使得

69

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 若第1列为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵, 求 a, Q .

解: 因为 Q 是正交矩阵, 所以, $Q^T = Q^{-1}$,

又因为 $Q^T A Q$ 是对角阵,

所以, Q 的列向量是矩阵 A 的特征向量, 即,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 解得 } \lambda = 2; a = 1.$$



10

矩阵A的特征多项式

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4),$$

有特征值 $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$.

$\lambda_2 = 3$ 代入 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

有非零解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

10

$$x_1 = 4 \text{ 代入 } (I - A)X = 0 \text{ 得 } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{有非零解 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ 单位化得 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ 的单位特征向量为 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$



70

设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $P_1 P_2$; B. $P_1^{-1} P_2$; C. $P_2 P_1$; D. $P_2 P_1^{-1}$.



70

设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A = \underline{\quad}.$$

A. $P_1 P_2$; B. $P_1^{-1} P_2$; C. $P_2 P_1$; D. $P_2 P_1^{-1}$.

答案: D.

因为 等列变换, 就是在矩阵的右侧 相应的 等矩阵; 等行变换, 就是在矩阵的左侧 相应的 等矩阵。

所以, $P_2 A P_1 = I, A = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$.



71

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是4阶矩阵, A 为 A 的伴随矩阵, 若

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $A^*X = 0$ 的基础解系可为_____.

- A. $1; 2;$ B. $1; 3;$ C. $1; 2; 3;$ D. $2; 3; 4.$



71

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是4阶矩阵, A 为 A 的伴随矩阵, 若

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $A^*X = 0$ 的基础解系可为_____.

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$ B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$ C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$ D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

答案: D.

因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系,

所以, $r(A) = 3$, 且, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$,

11

又因为, $A A^H = A A^H = j A j^H = 0$,

所以, $r(A) = 1$, A 的列向量是 $A X = 0$ 的解,

且, $A X = 0$ 的



11

又因为, $A A = A A$



11

又因为, $A A^H = A A^H = |jA|^2 = 0$,

所以, $r(A) = 1$, A 的列向量是 $A X = 0$ 的解,

且, $A X = 0$ 的, ~~量~~ A 1
 , =



11

二次曲面方程 相应的二次型 $x_1^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz$

相应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

因为经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 所以, $r(A) = 2$, $jA_j = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

而, $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$, 所以, $a = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



73

二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$,
则 f 的正惯性指数是____.



73

二次型 $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$,
则 f 的正惯性指数是____.

答案: 2.

正惯性指数等于二次型矩阵的正特征值 数。 f 的



74

设 A 是 4×3 矩阵, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的 3 个线性无关的解, $k_1; k_2$ 为任意数, 则 $AX = b$ 的通解为_____.

A. $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_2 - \alpha_1);$

B. $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} + k_2(\alpha_2 - \alpha_1);$

C. $\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1);$

D. $\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1).$



74

设 A 是 4×3 矩阵, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的3个线性无关的解, $k_1; k_2$ 为任意数, 则 $AX = b$ 的通解为_____.

- A. $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_2 - \alpha_1)$; B. $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_2(\alpha_2 - \alpha_1)$;
 C. $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1)$; D. $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1)$.

答案: C.

A 是 4×3 矩阵, $AX = 0$ 基础解系至多含两个解. $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的3个线性无关的解, 所以,

$\alpha_3 - \alpha_1; \alpha_2 - \alpha_1$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 且, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}$ 是 $AX = b$ 的一个解, 所以, 通解是 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1)$.



75

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 的秩为1, A 中行元素之和为3, 则 f 在正交变换下 $X = QY$ 的标准型为_____.



75

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 的秩为1, A 中行元素之和为3, 则 f 在正交变换下 $X = QY$ 的标准型为_____.

答案: $3y_1^2$.

二次型的秩等于2, A 只有一 非零特征值,

又因为, A 的每行元素之和等于3,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

3是 A 的唯一非零特征值,

所以, 正交变换之下的标准型只有一项非零, 且系数为3.



11

76

设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 不能由向量组

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ 线性表示.

(1)求a的值; (2)将 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 用 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 线性表示.



11

76

设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 不能由向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \text{ 线性表 .}$$

(1)求a的值; (2)将 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 用 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 线性表示.

解: (1)以 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3$ 为列构造矩阵, 并进行 等行变换, 化为阶梯形,



11

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 0 & & & & & 1 & 0 & & & & 1 \\
 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\
 @B & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 @ & & & & & & & & & & & \\
 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & a & 5 & 2 & 1 & 0
 \end{array}$$

$1; 2; 3$ 不能由 $1; 2; 3$ 线性表出, 得 $a = 5$.

(2) 以 $1; 2; 3; 1; 1; 3$ 为列构造矩阵, 进行等行变换,

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
 @B & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\
 @ & & & & & & & & & & & \\
 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2
 \end{array}$$

得

$$\begin{aligned}
 1 &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\
 2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\
 3 &= 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 3
 \end{aligned}$$



77

A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A.$$

求 (1) A 的特征值与特征向量; (2) 矩阵 A .



77

A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A$.

求 (1) A 的特征值与特征向量; (2) 矩阵 A .

解: 因为矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 所以 A 有特征值 $\lambda_1 = 0$,

又因为 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A$,



11

$$\text{所以, } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即, A 有特征值 $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 1$. 且属于特征值

$$\lambda_2 = 1; \lambda_3 = 1 \text{ 的特征向量分别是 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 A 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量正交.

$$\text{设矩阵 } A \text{ 属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 的特征向量为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$



11

$$\begin{aligned} \text{则: } & \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \text{ 属于 } \lambda = 0 \text{ 的特征向量} \end{aligned}$$

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



11

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} :
 \end{aligned}$$



78

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ A \\ A \\ A \end{matrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} C_2 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_2 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ A \\ A \\ A \end{matrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} C_3 \\ C_3 \\ C_3 \\ C_3 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ A \\ A \\ A \end{matrix}; \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} C_4 \\ C_4 \\ C_4 \\ C_4 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ A \\ A \\ A \end{matrix},$ 其

中 $C_1; C_2; C_3; C_4$ 为任意数, 则下列向量组线性相关的是_____.

- A. $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$; B. $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_4$; C. $\alpha_1; \alpha_3; \alpha_4$; D. $\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$.



78

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1$; $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_2$; $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_3$; $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_4$, 其

中 $C_1; C_2; C_3; C_4$ 为任意数, 则下列向量组线性相关的是_____.

A. $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$; B. $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_4$; C. $\alpha_1; \alpha_3; \alpha_4$; D. $\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$.

答案: C.

$C_1 \neq 0$ 时, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关; $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_4$ 也线性无关;

$C_3 + C_4 \neq 0$ 时, $\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ 线性无关;



79

设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$, A

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

则 $Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$; C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$; D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$.



79

设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$, A

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

则 $Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$; C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C$; D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$.

答案: B.



12

$$\text{因为 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } AP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的线性无关的特征向量,

所以, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 也是矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特

征向量,

$$AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12

80

设 X 是3维单位向量, I 是3阶单位矩阵, 则 $I - XX^T$ 的秩是_____.



80

设 X 是3维单位向量, I 是3阶单位矩阵, 则 $I - XX^T$ 的秩是_____.

答案: 2.

因为 X 是3维单位向量, 所以, $X^T X = 1$ 有两 线性无关的解, 记为 $Y_1; Y_2$, 则 $X; Y_1; Y_2$ 线性无关.

以 $X; Y_1; Y_2$ 为列构造矩阵 $P = (X \ Y_1 \ Y_2)$, 则 P 可逆, 且

$$\begin{aligned} (I - XX^T)P &= (I - XX^T)(X \ Y_1 \ Y_2) \\ &= (I - XX^T)X \ (I - XX^T)Y_1 \ (I - XX^T)Y_2 \\ &= 0X \ Y_1 \ Y_2 = (X \ Y_1 \ Y_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

12

81

设 A 为3阶方阵, $|A| = 3$, A^{-1} 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B , 则 $|BA^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.



81

设 A 为3阶方阵, $|A| = 3$, A^{-1} 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B , 则 $|BA^{-1}| = \underline{\quad}$.

答案: 27.

因为 $B = P(1; 2)A$, 且 $AA^{-1} = |A|I$, 所以,

$$\begin{aligned} |BA^{-1}| &= |P(1; 2)AA^{-1}| = |P(1; 2)||AA^{-1}| = (-1)|A||A^{-1}| \\ &= (-1)|A|^3 = -27. \end{aligned}$$



12

82

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求(1) $|A|$;(2) 已知线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解, 求 a , $AX = b$ 的通解.

82

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求(1) jA_j ;(2) 已知线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解, 求 a , $AX = b$ 的通解.

解: (1) 按第1列展开计算

$$jA_j = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a^4.$$



12

(2)对方 组的增广矩阵进行 等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^4 \end{pmatrix} \xrightarrow{a(1+a)}$$

方 有无穷多解, , $a = 1$.

$a = 1$ 时,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方 组有一 特解, 导 组基础解系

12

通解是:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jk是任意数



12

通解是:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j, k \text{ 是任意数}$$

83

三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置,

已知 $r(A^T A) = 2$, 且二次型 $f = X^T A^T A X$.

(1) 求 a ; (2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写 正交变换过

12

$$\text{解: (1) } A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a & 3+a^2 \end{pmatrix}$$

$$r(A^T A) = 2, |A^T A| = (3+a^2)(a+1)^2 = 0, a = -1.$$

$$(2) \text{二次型的矩阵 } A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{特征多项式 } | \lambda I - A^T A | = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=$$



12

特征值为 $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 6$,

将 $\lambda_1 = 0$ 代入 $(\lambda I - A^T A)X = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 得特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda_2 = 2$ 代入 $(\lambda I - A^T A)X = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 得特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



12

将 $\lambda_3 = 6$ 代入 $(\lambda I - A)X = 0$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 得特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

单位化后分别为 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

正交变换 $X = QY$, 化二次型的标准型是 $2y_2^2 + 4y_3^2$.





84

设 $A; B; C$ 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则_____.

- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价;
- B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价;
- C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价;
- D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

答案: B

矩阵积 AB 的列向量为 A 的列向量的线性组合, 行向量为 B 的行向量的线性组合. 所以, C 的列向量组为 A 的列向量组的组合; 而 $A = CB^{-1}$, A 的列向量组为 C 的列向量组的组合;
所以, C 的列向量组与 A 的列向量组等价.



85

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ a & b & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ 相似的 分必要条件是_____.

- A. $a = 0; b = 2$; B. $a = 0$, b 为任意数;
C. $a = 2; b = 0$; D. $a = 2$, b 为任意数



85

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是_____.

- A. $a = 0; b = 2$; B. $a = 0$, b 为任意数;
C. $a = 2; b = 0$; D. $a = 2$, b 为任意数

答案: B .

相似矩阵有相同的特征值.

$$\begin{vmatrix} 1-a & -1 & 0 & -1 \\ a & b-a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = 0$$

13

有三 $2; b; 0,$

$$2 \quad 1 \quad a \quad 1$$

$$a \quad 2 \quad b \quad a = 0, \text{ 得 } a = 0,$$

$$1 \quad a \quad 2 \quad 1$$

$$b \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$0 \quad b \quad b \quad 0 = 0, \text{ 得 } b \text{ 是任意数,}$$

$$1 \quad 0 \quad b \quad 1$$

所以, $a = 0, b$ 为任意数.



86

设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零实方阵, $|A|$ 是 A 的行列式, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.



86

设 $A = (a_{ij})$ 是3阶非零实方阵, $|A|$ 是 A 的行列式, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1; 2; 3$), 则 $|A| = \underline{\quad}$.

解答: 1 0.

$$\text{因为 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

所以, $|A| = (-1)^3 |A^T| = -|A|$, 又因为, $AA^T = |A|I$,

且, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$,

所以, $|A| = |A|^2$, 即, $|A|^2 = |A|$; $|A|^2 + |A| = 0$,

$|A| = 1$.



87

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} A,$$
 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C , 使得 $AC = CA = B$, 并求所有矩阵 C .





$$\begin{array}{rcl} & x_2 + ax_3 & = 0 \\ & ax_1 + x_2 + ax_4 & = 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 & = 1 \\ x_2 & ax_3 & & = b \end{array},$$

的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + a \\ b \end{pmatrix}$$

有解, $a = 1; b = 0.$

13

方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases}, \quad x_3, x_4 \text{ 是自由未知量.}$$

所有的矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 + x_3 + x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} A$, x_3, x_4 是任意数.



88

设二次型 $f = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$,

$$\text{记 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵是 $2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T$; (2) 若 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准型是 $2y_1^2 + y_2^2$.



88

设二次型 $f = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$,

$$\text{记 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵是 $2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T$; (2) 若 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准型是 $2y_1^2 + y_2^2$.

(1) 因为 $2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T = (2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix})^T$ 是对称矩阵, 且

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2a_2 & 2a_1 & 2a_3 \\ 2a_3 & 2a_3 & 2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ b_3 & b_3 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



13

记作 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix}$, 则,

Q 是正交矩阵, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix}$ 是正交变换, 且

$$Q^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A \end{matrix} Q$$



13

$$= Q^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ @ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ @ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\ @ & A & A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ @ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$



13

$$\begin{aligned}
 &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

所以, 正交变换 $X = QY$ 化二次型为 $2y_1^2 + y_2^2$.



89

行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $(ad - bc)^2$; B. $(ad + bc)^2$; C. $a^2d^2 - b^2c^2$; D. $b^2c^2 - a^2d^2$.



89

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $(ad - bc)^2$; B. $(ad + bc)^2$; C. $a^2d^2 - b^2c^2$; D. $b^2c^2 - a^2d^2$.

答案: B .

利用行列式展开, 直接计算即得.



90

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3维向量, 则对任意 数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- A. 必要非充分条件; B. 充分非必要条件;
C. 充分必要条件; D. 既非充分又非必要条件.



90

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3维向量, 则对任意 数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- A. 必要非充分条件; B. 充分非必要条件;
C. 充分必要条件; D. 既非充分又非必要条件.

答案: A .

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则对任意 数 k, l , 组合

$$x_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + x_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,$$

即, 可以得到 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关;

但 α_1, α_2 线性无关且 $\alpha_3 = 0$, 对任意 数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 都线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 确线性相关.



91

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的 惯性指数是1, 则a的取值范围____.



91

设二次型 $f = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的 惯性指数是1, 则a的取值范围_____.

答案: [-2; 2] .

利用配方, $f = (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2$

$$\begin{cases} x_1 + ax_3 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - ay_3 \\ x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

化二次型为 $f = y_1^2 - y_2^2 + (4 - a^2)y_3^2$.

惯性指数为1, $4 - a^2 > 0$; $-2 < a < 2$.



92

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, I 是3阶单位矩阵.

- (1) 求方程组 $AX = 0$ 的基础解系;
- (2) 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .



92

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, I 是 3 阶单位矩阵.

- (1) 求方程组 $AX = 0$ 的基础解系;
 (2) 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .

解: (1) 对矩阵 A 实施 等行变换,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



			1	2	3	4	1	0	0	C
(A I) !	@	0	1	1	1	0	1	0	0	C
		0	0	1	3	1	4	1		C
0						1				
	@	1	0	0	1	2	6	1		C
!	@	0	1	0	2	1	3	1		C,
		0	0	1	3	1	4	1		A



$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{的通解} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};$$



14

$$\begin{aligned}
 AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{的通解} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \\
 \text{全部的矩阵 } B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\
 &\quad k \quad \quad \quad l \quad \quad \quad m
 \end{aligned}$$

其中, $k; l; m$ 是任意数.



93

证明: n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
 \end{pmatrix}
 \quad \text{与} \quad
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & n
 \end{pmatrix}$$

相似.



93

证明: n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ 相似.}$$

证明: 因为两矩阵有相同特征值 $\lambda_1 = 0 (n-1 \text{重}), \lambda_2 = n$,

且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ 属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 有 } n-1 \text{ 线性无关的特}$$

征向量



14

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & & & 0 & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ @ & 0 & A & & & @ & 1 & A \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \\ & 0 \\ & 0 \\ & \vdots \\ @ & 1 & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 2 & \\ & & & \ddots & \\ @ & & & & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & n \end{pmatrix}$$

属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 也有 $n-1$ 线性无关的特

征向量



14

$$\begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 \textcircled{1} & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 1 \\
 \textcircled{A} & 0 \\
 0 & 0
 \end{array}
 ;
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 \textcircled{1} & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 1 \\
 \textcircled{A} & 0 \\
 0 & 0
 \end{array}
 ; \dots ;
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 \textcircled{1} & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 1 \\
 \textcircled{A} & 0 \\
 0 & 0
 \end{array}
 ,$$

所以，它们相似于同一 对角阵

$$\begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 \\
 \textcircled{A} & 0 \\
 0 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & n
 \end{array}
 ,$$

所以，它们相似.



94

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $S = \{f, g\}$, 则线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解的充分必要条件是_____.

A. $a \neq 1; d \neq 1$; B. $a \neq 1; d = 1$;

C. $a = 1; d \neq 1$; D. $a = 1; d = 1$.



94

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ d & c \\ d^2 & c \end{pmatrix}$, 若集合 $S = \{f, g\}$, 则线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解的充分必要条件是_____.

- A. $a \neq 1; d \neq 0$; B. $a \neq 1; d = 0$;
 C. $a = 1; d \neq 0$; D. $a = 1; d = 0$.

答案: D.

构造矩阵 $(A \ b)$, 并进行 等行变换,





95

设二次型 $f(x_1; x_2; x_3)$ 在正交变换 $X = PY$ 下的标准型

是 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

则 $f(x_1; x_2; x_3)$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型是____

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$



95

设二次型 $f(x_1; x_2; x_3)$ 在正交变换 $X = PY$ 下的标准型

是 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 若 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

则 $f(x_1; x_2; x_3)$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型是____

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

答案: A.

设二次型的矩阵为 A , 则 $AP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$,
 A

即, $A_{11} = 2$; $A_{22} = 2$; $A_{33} = 3$.



15

所以, $AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$.

二次型在正交变换 $X = QY$ 下, 化为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.



所以, $AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$.

二次型在正交变换 $X = QY$ 下, 化为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

96

$$n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15

答案: $\frac{2^{n+1}}{2}$.

从最后一行开始, 下一行 2 加到上一行, 行列式的值不变,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \end{array}$$

$$\text{原行列式} = \begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2 + 2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

再按第一行展开,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} = 2^{n+1} - 2.$$



97

设向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是3维向量空间 F^3 的一组基,

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3; \quad \beta_2 = 2\alpha_2; \quad \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3.$$

(1) 证明向量组 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 是 F^3 的一组基;

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量在基 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 与基 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 α .



97

设向量组 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 是3维向量空间 F^3 的一组基,

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3; \quad \beta_2 = 2\alpha_2; \quad \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3.$$

(1) 证明向量组 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 是 F^3 的一组基;

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 在基 $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ 与基 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 下的坐标相同, 并求 所有的 .

(1) 证明 因为

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = (2x_1 + x_3)\alpha_1 + 2x_2\alpha_2 + [2kx_1 + (k+1)x_3]\alpha_3;$$

且 $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关, 所以, $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$



15

$$\begin{array}{l} 8 \\ \sim \\) \\ \sim \\ \cdot \end{array} \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 \\ 2kx_1 + (k+1)x_3 \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array} = 4,$$

$$\begin{array}{ccc} 2k & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array}$$

方组只有零解. 所以, $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ 线性无关, 是 F^3 的基.

(2) 设 α 在两基下的共同坐标是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 即,



15

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix},$$

$$\text{而, } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix},$$

所以,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \textcircled{B}^{X_1} \textcircled{C} \\ \textcircled{B}^{X_2} \textcircled{C} \\ \textcircled{A}^{X_3} \end{pmatrix},$$



15

再由 x_1, x_2, x_3 线性无关,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ 有非零解. 得, $k = 0$.

方程组有通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 是任意数.

所有的构造的集合: $f_j = k_1 + k_3; k \in 0g$.



98

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $a; b$ 的值. (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.



98

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ; $uT d \vee 1049091 Bf 10.1c608 Tf 9.153 0 296 [()] TJ3343$



15

所以,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

在 $a = 1$ 时的有两 线性无关的解.

得: $a = 4$.

矩阵 A 的行列式 $|A| = 5$, 所以, $|B| = b = 5$.

(2) 将 $\lambda_1 = 1$ 代入 $(\lambda I - A)X = 0$, 得属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

将 $\lambda_2 = 5$ 代入 $(\lambda I - A)X = 0$, 得属于特征值 $\lambda_2 = 5$ 的线性无关的特征向量: ξ_3

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$



99

设3阶矩阵 A 的特征值为2, -2, 1, $B = A^2 - A + I$, 其中 I 是3阶单位矩阵, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.



99

设3阶矩阵 A 的特征值为2, -2, 1, $B = A^2 - A + I$, 其中 I 是3阶单位矩阵, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 21.

因为, A 有3个不同特征值2, -2, 1, 所以存在可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以,}$$

$$P^{-1}BP = P^{-1}(A^2 - A + I)P = (P^{-1}AP)^2 - (P^{-1}AP) + I$$



15

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 \\ C \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ A \end{pmatrix}, \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

所以, $jBj = jP^{-1}BPj = 21$:



100

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = 0$.

(1) 求 a 的值; (2) 若矩阵 X 满足 $XA^2 - AX + AXA^2 = I$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵, 求 X .



100

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = 0$.

(1) 求 a 的值; (2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = I$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵, 求 X .

解 (1) 因为 $A^3 = 0$, 所以 $jA_j = 0$, 即, $jA_j = a^3 = 0$, $a = 0$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} X - XA^2 - AX + AXA^2 &= X(I - A^2) - AX(I - A^2) \\ &= (X - AX)(I - A^2) = (I - A)X(I - A^2) \end{aligned}$$





101

设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是C.

- A. A^T 与 B^T 相似; B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似;
C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似; D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似;



101

设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是C.

- A. A^T 与 B^T 相似; B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似;
C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似; D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似;

解答 ____.

A 与 B 相似, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$;

所以, $(P^{-1}AP)^T = B^T$, $(P^{-1}AP)^{-1} = B^{-1}$, 即,

$$P^T A^T (P^{-1})^T = [(P^{-1})^T]^{-1} A^T (P^{-1})^T = B^T,$$

$$(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P = B^{-1},$$

$$P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1},$$



102

行列式

$$\begin{vmatrix}
 & & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & & 1 & 0 \\
 0 & 0 & & & 1 \\
 4 & 3 & 2 & & +1
 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



102

行列式

$$\begin{vmatrix}
 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & 1 & 0 \\
 0 & 0 & & 1 \\
 4 & 3 & 2 & +1
 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解答 $\underline{4 + 3 + 2^2 + 3 + 4}.$

$$\begin{vmatrix}
 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & 1 & 0 \\
 0 & 0 & & 1 \\
 4 & 3 & 2 & +1
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 0 & 0 & & 1 \\
 4 + 3 & 3 & 2 & +1
 \end{vmatrix}$$



16

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc}
 0 & & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & & 1 & 0 \\
 3 & & 0 & & 1 \\
 4 + 3 & + 2^2 & 3 & 2 & + 1
 \end{array} \\
 &= \begin{array}{cccc}
 0 & & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & & 1 & 0 \\
 0 & & 0 & & 1 \\
 4 + 3 & + 2^2 + (+ 1)^3 & 3 & 2 & + 1
 \end{array} \\
 &= 4 + 3 + 2^2 + 3 + 4.
 \end{aligned}$$



103

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 有解时, 求解此方程.



103

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 有解时, 求解此方程.

解 构造矩阵 $(A \ B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & a & 1 & a & a \\ 1 & 1 & a & a & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

对其进行 等行变换, 化为阶梯形, 方程 $AX = B$ 有解, 后两列没有主元.



16

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & & & & & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \\
 \vdots & & & & & \\
 0 & a+2 & 3 & 3 & a & 4 \\
 0 & 0 & a & 1 & 1 & a & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 C \\
 C \\
 C \\
 C \\
 A
 \end{array}$$

当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 1$ 时, 矩阵 A 可逆, 方程 $AX = B$ 有唯一解.

进一步将 $(A \ B)$ 化为规范阶梯形

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} & \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 C \\
 C \\
 C \\
 A
 \end{array}, X = \begin{array}{cc}
 1 & 1 \\
 0 & \frac{a-4}{a+2} \\
 1 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 C \\
 C \\
 A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 6 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 C \\
 C \\
 A
 \end{array}$$

当 $a = 2$ 时,

$(A \ B)$

!



16

$$AX = 0 \text{ 有基础解系 } = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 有一解 } = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{所以, } AX = B \text{ 的一般解为 } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中, $k; l$ 是任意数.



104

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 满足 $B^2 = BA$.

记 $B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 将 $1; 2; 3$ 分别表示 $1; 2; 3$ 的线性组合.



104

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 满足 $B^2 = BA$.

记 $B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 将 $1; 2; 3$ 分别表示 $1; 2; 3$ 的线性组合.

解 (1) A 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$,

3 阶矩阵 A 有 3 个不同特征值 $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = -2$, 一定相似于对角阵.



16

求矩阵 A 属



$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{99} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2^{99} & 2 & 1 & 2^{99} & 2^{98} & 2 & 2^{100} & 2 & 2^{100} & 2^{99} \end{pmatrix}.$$



16

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 0 & & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 \\ \textcircled{B} & 3 & 1 & 1 & \textcircled{C} & 0 & 0 & 0 & \textcircled{C} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \textcircled{C} \\ \textcircled{A} & 2 & 1 & 2 & \textcircled{A} & 0 & 1 & 0 & \textcircled{A} & 2 & 1 & 2 & \textcircled{A} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{99} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \textcircled{B} & 2^{99} & 2 & 1 & 2^{99} & 2^{98} & 2 & \textcircled{C} \\ \textcircled{A} & 2^{100} & 2 & 1 & 2^{100} & 2^{99} & 2 & \textcircled{C} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} 0 & & 0 & & 0 \\ \textcircled{B} & 2^{99} & 2 & 1 & 2^{99} & 2^{98} & 2 & \textcircled{C} \\ \textcircled{A} & 2^{100} & 2 & 1 & 2^{100} & 2^{99} & 2 & \textcircled{C} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

(2) 因为 $B^2 = BA$, 所以,

$$\begin{aligned}
 B^{100} &= B^{98} B^2 = B^{98} BA = B^{97} B^2 A = B^{97} BA^2 \\
 &= B^{96} B^2 A^2 = B^{96} BA^3 = \dots = BA^{99} \\
 &= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \textcircled{B} & 2^{99} & 2 & 1 & 2^{99} & 2^{98} & 2 & \textcircled{C} \\ \textcircled{A} & 2^{100} & 2 & 1 & 2^{100} & 2^{99} & 2 & \textcircled{C} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

16

 $\sum_{i=1}^n$

1

 $\cdot \sum_{i=1}^n$ 

16

$$\begin{matrix} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix}$$

$$_1 = (2^{99} \quad 2) \quad _1 + (2^{100} \quad 2) \quad _2$$

$$\begin{matrix} \sim \\ \sim \\ \cdot \end{matrix}$$

$$_2 = (1 \quad 2^{99}) \quad _1 + (1 \quad 2^{100}) \quad _2 \quad .$$

$$_3 = (2^{98} \quad 2) \quad _1 + (2^{99} \quad 2) \quad _2$$

105

设二次型 $f = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正、 惯
性指数分别为1,2, 则____.

A. $a > 1$; B. $a < 2$;



16

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 8 \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 2^{99} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} 2^{100} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \sim \\ \sim \\ \cdot \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{99} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} . \\ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 2^{98} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} 2^{99} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \end{aligned}$$

105

设二次型 $f = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正、惯性指数分别为 1, 2, 则_____.

A. $a > 1$; B. $a < 2$; C. $2 < a < 1$; D. $a = 1$ 或 $a = 2$.

答案: C .

因为二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

有特征值 $\lambda_1 = a + 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$.

f 的正惯性指数为1, 负惯性指数为2; 所以,
 $a + 2 > 0$ 且 $a - 1 < 0$, 即, $-2 < a < 1$.



16

有特征值 $\lambda_1 = a + 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$.

f 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2; 所以,
 $a + 2 > 0$ 且 $a - 1 < 0$, 即, $-2 < a < 1$.

106

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



16

有特征值 $\lambda_1 = a + 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$.

f 的正惯性指数为1, 负惯性指数为2; 所以,
 $a + 2 > 0$ 且 $a - 1 < 0$, 即, $-2 < a < 1$.

106

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 0 2.

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为2,

16

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ 秩=2, $a = 2$.



16

$$\text{矩阵 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 & a-2 \end{pmatrix},$$

秩=2, $a=2$.

107

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a & 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 2a & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 且方}$$

组 $AX =$ 无解.

(1)求 a 的值; (2)求方 组 $A^T AX = A^T$ 的通解.



16

解 (1) 方程组的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

等行变换，化其为阶梯形

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2a & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a

2

16

方 $A^A X = A^T$ 的增广矩阵 $\overline{A^T A} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix},$$

等行变换化为阶梯形 $\overline{A^T A} !$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}$$

$A^T A X = 0$ 有基础解系 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}$, $A^T A X = A^T$ 有解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}$,

通解为 $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ A \end{matrix}$, k 为任意数.



108

设 α 是 n 维列向量, I 是 n 阶单位矩阵, 则____.

A. $I - \alpha\alpha^T$ 不可逆; B. $I + \alpha\alpha^T$ 不可逆;

C. $I - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆; D. $I + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.



108

设 α 是 n 维列向量, I 是 n 阶单位矩阵, 则_____.

A. $I - \alpha\alpha^T$ 不可逆; B. $I + \alpha\alpha^T$ 不可逆;

C. $I - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆; D. $I + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

答案: A .

由于 $(I - \alpha\alpha^T)\alpha = (I - \alpha\alpha^T)\alpha = 0$, 是 $(I - \alpha\alpha^T)X = 0$ 的非零解, $r(I - \alpha\alpha^T) < n$, $I - \alpha\alpha^T$ 不可逆.

一般的, 若 $(I + b\alpha\alpha^T)X = 0$, 两边同时左乘 α^T , 得

$$(\alpha^T + b\alpha^T\alpha^T)X = 0, (1 + b)\alpha^TX = 0,$$

若 $b \neq -1$, 则 $\alpha^TX = 0$, 即, $(I + b\alpha\alpha^T)X = 0 \Rightarrow X = 0$,

$(I + b\alpha\alpha^T)X = 0$ 只有零解, $I + b\alpha\alpha^T$ 可逆.

109

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

则_____.

- A. A与C相似, B与C相似; B. A与C相似, B与C不相似;
C. A与C不相似, B与C相似; D. A与C不相似, B与C相似.



109

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

则_____.

- A. A与C相似, B与C相似; B. A与C相似, B与C不相似;
C. A与C不相似, B与C相似; D. A与C不相似, B与C相似.

答案: B .

三 矩阵有相同的特征值(特征多项式),

但属于特征值 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量 数不同, 矩阵A有两, 矩阵B有一, A可以对角化为C, B不能对角化为C.

110

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的3维列向量, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 _____.



110

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的3维列向量, 则向量组 A_1, A_2, A_3 的秩为____.

答案: 2 .

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列构造矩阵 B ,

则 B 是可逆矩阵, 且 A_1, A_2, A_3 是 AB 的列,

所以, A_1, A_2, A_3 的秩等于 AB 的秩,

又因为, B 可逆, A 与 AB 等价, 所以, $r(AB) = r(A) = 2$.

111

设3阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ 有3 不同特征值, 且 $\lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2$.

(1)证明: $r(A) = 2$;

(2)若 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$, 求方程 $AX = 0$ 的通解.



111

设3阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 有3 不同特征值, 且 $a_{33} = a_{11} + 2a_{22}$.

(1)证明: $r(A) = 2$;

(2)若 $a_{33} = a_{11} + 2a_{22} + a_{33}$, 求方程 $AX = 0$ 的通解.

解 (1)因为, $a_{33} = a_{11} + 2a_{22}$, 所以, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 A 属于 0 特征值的特征向量.

的特征向量.

又因为 A 有3 不同特征值, A 相似于对角阵, 且 A 有一 0 特征值, 2 不同的非零特征值, 所以,



A 相似于

0	0	0
0	0	0
0	a	0
0	0	

112

设二次型 $f = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值及一正交矩阵 Q .



112

设二次型 $f = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值及一正交矩阵 Q .

解 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且由 f 的标准

型, $r(A) = 2$, 得: $a = 2$.

A 的特征多项式 $| \lambda I - A | = (\lambda + 3)(\lambda - 6)$,

A 有 3 不同特征值 $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 6$.

将特征值分别代入 $(\lambda I - A)X = 0$, 求其特征向量, 并单位化,



所以，正交矩阵是 $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.



所以，正交矩阵是 $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

17

所以，正交矩阵是 Q



17

因为 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 所以,

$$A_{\alpha_1} = 0 \alpha_1; A_{\alpha_2} = 1 \alpha_2; A_{\alpha_3} = 2 \alpha_3,$$

$$\text{所以, } A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3} = \alpha_2 + 2\alpha_3.$$



因为 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 所以,

$$A_1 = 0 \quad 1; A_2 = 1 \quad 2; A_3 = 2 \quad 3,$$

$$\text{所以, } A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

114

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的一特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $a = \underline{\quad}$.



17

答案: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量,

所以, 存在数 k , 满足 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$k = 1, a = 1$.



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

