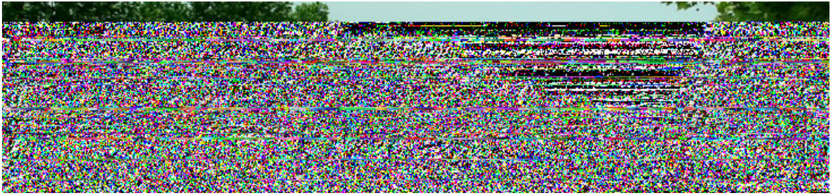
线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院



目录

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

c 一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m =$$

有解的充要条件.

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

c 一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m =$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何¦？

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

c 一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \quad + x_m \quad _m =$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何¦？

定理3.8 初等行　换　改　矩阵列向量组的线性相关性.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

c 一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \quad + x_m \quad {}_m =$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何¦？

定理3.8 初等行　换　改　矩阵列向量组的线性相关性.即，

假设 $_1; \quad _2; :::; \quad _m$是$n \quad m$ 矩阵A的列向量组　对A 实施初等行　换得到矩阵B ， $_1; \quad _2; :::; \quad _m$是矩阵$B$的列向量组.

任取B 的第$j_1; j_2; :::; j_k$列 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$ ，其对应矩阵A的列向量组为 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$.

若 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$线性相关，则 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$也线性相关，

若 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$线性无关，则 $_{j_1}; \quad _{j_2}; :::; \quad _{j_k}$也线性无关.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

任何一个n　m矩阵经过初等行　换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

任何一个$n\quad m$矩阵经过初等行　换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个　分组，一定线性无关.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

任何一个n　m矩阵经过初等行　换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个　分组，一定线性无关.

初等行　换　改　矩阵列向量的线性相关性，所以

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

任何一个n　m矩阵经过初等行　换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个　分组，一定线性无关.

初等行　换　改　矩阵列向量的线性相关性，所以

定理3.9 设 $_1;$　$_2; :::;$　$_m$是n　m 矩阵A的列向量组，经过初等行　换化为规范阶梯形矩阵.

假设其有r 个主元，… 主元所在的列是第$k_1; k_2; :::; k_r$ 列，则矩阵A的列向量组的秩为r ，…　$_{k_1};$　$_{k_2}; :::;$　$_{k_r}$是A 的列向量组的一个极大线性无关组.

定理3.9 也给出了¦向量组的秩以及极大线性无关组的一种方法.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

设 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ 是F^n中的向量组，以 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$为列向量组构成一个$n\quad m$矩阵A，

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

设 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$ 是F^n中的向量组，以 $_1;\ _2;\ldots;\ _m$为列向量组构成一个$n\quad m$矩阵A，对A 实施初等行　换，将其化成阶梯形矩阵，

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

设 $_1;\ _2;:::;\ _m$ 是F^n中的向量组，以 $_1;\ _2;:::;\ _m$为列向量组构成一个$n\ \ m$矩阵A，对A 实施初等行　换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组 $_1;\ _2;:::;\ _m$ 的秩，… 主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组 $_1;\ _2;:::;\ _m$ 的一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

设 $_1;\ _2;\dots;\ _m$ 是F^n中的向量组，以 $_1;\ _2;\dots;\ _m$为列向量组构成一个$n\quad m$矩阵A，对A 实施初等行　换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组 $_1;\ _2;\dots;\ _m$ 的秩，… 主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组 $_1;\ _2;\dots;\ _m$ 的一个极大线性无关组.

定义3.6 矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A 的秩.记作$r(A)$.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

设 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 是F^n中的向量组，以 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$为列向量组构成一个$n\quad m$矩阵A，对A 实施初等行 换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 的秩，… 主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组 $_1;\ _2;\cdots;\ _m$ 的一个极大线性无关组.

定义3.6 矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A 的秩.记作$r(A)$.

例3.10 已知向量组

$$_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix};\quad _2=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix};\quad _3=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix};\quad _4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

¦ 它的秩以及它的一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解

1　2　3　4

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$AJ/F43\quad 131$$

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

解 以 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 为列向量组构作矩阵

$$AJ/F43 \quad 131$$

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

解 以 $_1;\ _2;\ _3;\ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行 换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;$ $_2;$ $_3;$ $_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解　以 $_1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在阶梯形矩阵中，有两个主元，... 主元分　在第1列和第3列，

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

解 以 $_1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行　换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在阶梯形矩阵中，有两个主元，… 主元分　在第1列和第3列，所以向量组的秩为2，… $_1;\ \ _3$是其一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & & 1 & 2\\ 2 & 1 & & 5\\ 1 & 10 & 6 & 1\end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

¦矩阵A的秩.其

例3.11 设矩阵A

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

A

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & 2 \\ 2 & & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & & 6 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解 对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，是任意数.

解 对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，　¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ 0 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ 0 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，¦矩阵$A$的秩.其中，　是任意数.

解　对矩阵A实施初等行　换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & & 5 \\ 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ 0 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$! \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 21 & +12 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{21}(\quad 10)(\quad +12)+5 & \frac{1}{7}(\quad 10)+1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当 $\frac{1}{21}(\quad 10)(\quad +12)+5=\frac{1}{21}(\quad +5)(\quad 3)\neq 0$,

即 $\neq\quad 5$ ... $\neq 3$ 时,

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\quad\ 10)(\quad +12)+5=\frac{1}{21}(\quad +5)(\quad\ 3)\neq 0$,
即 $\neq\ 5$ … $\neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，
这时$r(A)=3$ ；

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\quad 10)(\quad +12)+5=\frac{1}{21}(\quad +5)(\quad 3)\neq 0$，
即 $\neq 5$ … $\neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，
这时$r(A)=3$；

当 $=\ 5$时，$\frac{1}{7}(\quad 10)+1=\frac{1}{7}(\quad 3)\neq 0$，矩阵$A$所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$；

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当 $\frac{1}{21}(\quad 10)(\quad +12)+5=\frac{1}{21}(\quad +5)(\quad 3)\neq 0$，
即 $\neq 5 \ldots \neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，
这时$r(A)=3$ ；

当 $\quad = \quad 5$时，$\frac{1}{7}(\quad 10)+1=\frac{1}{7}(\quad 3)\neq 0$ ，矩阵A所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$ ；

当 $\quad =3$ 时，$\frac{1}{7}(\quad 10)+1=\frac{1}{7}(\quad 3)=0$ ，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为2，这时$r(A)=2$.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad ;$$

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 ${}_1; \quad {}_2; \cdots; \quad {}_m$，增广矩阵$A$的列向量组为 ${}_1; \quad {}_2; \cdots; \quad {}_m; \quad$.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 $_1;\ \ _2; \cdots ;\ \ _m$，增广矩阵$A$的列向量组为 $_1;\ \ _2; \cdots ;\ \ _m;\quad$. 由于

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \qquad \text{有解}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m$，增广矩阵$A$的列向量组为 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m;\quad$. 由于

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad$$ 有解

，　可以由 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m$线性　出(向量线性　出的定义)

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 $_1; \quad _2; \dots ; \quad _m$ ，增广矩阵A的列向量组为 $_1; \quad _2; \dots ; \quad _m; \quad$. 由于

$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad$ 有解

，　可以由 $_1; \quad _2; \dots ; \quad _m$线性　出(向量线性　出的定义)

，　$_1; \quad _2; \dots ; \quad _m$与 $_1; \quad _2; \dots ; \quad _m;$　有相同的秩(定理3.6)

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$，增广矩阵A的列向量组为 $_1; \ _2; \cdots; \ _m; \quad$. 由于

$x_1 \quad _1 + x_2 \quad _2 + \qquad + x_m \quad _m = \quad$ 有解

， 可以由 $_1; \ _2; \cdots; \ _m$线性 出(向量线性 出的定义)

， $_1; \ _2; \cdots; \ _m$与 $_1; \ _2; \cdots; \ _m; \quad$ 有相同的秩(定理3.6)

， $r(A) = r(\overline{A})$(矩阵秩的定义).

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad ;$$

其系数矩阵A的列向量组为 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m$，增广矩阵$A$的列向量组为 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m;\quad$. 由于

$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad$ 有解

, 可以由 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m$线性 出(向量线性 出的定义)

, ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m$与 ${}_1;\ \ {}_2;\cdots;\ \ {}_m;\quad$ 有相同的秩(定理3.6)

, $r(A) = r(\overline{A})$(矩阵秩的定义).

定理3.10 线性方程组$x_1 \quad {}_1 + x_2 \quad {}_2 + \qquad + x_m \quad {}_m = \quad$ 的系数矩阵为A，增广矩阵为$\overline{A}$，

则方程组有解的充要条件是 $r(A) = r(\overline{A})$.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；

若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一　分，

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一 分，而初等行换 改 矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行换，将其化为阶梯形，就可以同时¦出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一　分，而初等行换　改　矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行　换，将其化为阶梯形，就可以同时¦出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A) = r(\overline{A})$ ，方程组有解；

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一 分，而初等行换 改 矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行 换，将其化为阶梯形，就可以同时¦出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A) = r(\overline{A})$ ，方程组有解；
若阶梯形矩阵的最后一列存在主元，则$r(A) + 1 = r(\overline{A})$ ，方程组无解.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数，则方程组有无¡多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一　分，而初等行换　改　矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行　换，将其化为阶梯形，就可以同时¦出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A) = r(\overline{A})$ ，方程组有解；

若阶梯形矩阵的最后一列存在主元，则$r(A) + 1 = r(\overline{A})$ ，方程组无解.

在方程组有解时，则可以进一　较秩与未知量个数的大小，确定方程组解的œ形.

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a;b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无¡多解？有唯一解？无解？

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12 当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无¡多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a;b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12 当$a;b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无¡多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$\overline{A}$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \quad \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无

¡ 多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 \quad ab & 1 \quad a & 1 \quad a \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无

¡ 多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 \quad ab & 1 \quad a & 1 \quad a \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当$a; b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 \quad ab & 1 \quad a & 1 \quad a \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \quad a & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1\\ x_1+2bx_2+x_3=2\\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1\\ 1 & 2b & 1 & 2\\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & b & 0 & 1\\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & b & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12 当$a;b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无¡ 多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1\ \ ab & 1\ \ a & 1\ \ a \end{pmatrix} \quad ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1\ \ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1\ \ a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12　当a, b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无¡多解？有唯一解？无解？

解　方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

例3.12 当$a;b$为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无¡多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行　换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \; ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1\ ab & 1\ a & 1\ a \end{pmatrix} \; ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1\ a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ! \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1\ a & 1 \\ 0 & 0 & b(1\ a) & 1\ b \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

当 $b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$ … $a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当 $b(1\quad a) \neq 0$，即$b \neq 0 \ldots a \neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

当 $b(1 \quad a) \neq 0$，即$b \neq 0$ … $a \neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a = 1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，而此时若$b \neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

当 $b(1 \quad a) \neq 0$，即$b \neq 0$ ... $a \neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$ ，方程组无解；

当$a = 1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$ ，而此时若$b \neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$ ，方程组无解；

当$a = 1$ ... $b = 1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 2$ 小于未知量个数，所以方程组有无¡多解；

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当 $b(1 \quad a) \neq 0$，即$b \neq 0$ … $a \neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$ ，方程组无解；

当$a = 1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$ ，而此时若$b \neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$ ，方程组无解；

当$a = 1$ … $b = 1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 2$ 小于未知量个数，所以方程组有无 ¡ 多解；

所以当$b \neq 0$ … $a \neq 1$时，方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的¦法　方程组有解的判定

当 $b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$ ... $a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ ... $b=1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=2$ 小于未知量个数，所以方程组有无¡多解；

所以当$b\neq 0$ ... $a\neq 1$时，方程组有唯一解；

当$b=0$时，或$a=1$ ... $b\neq 1$ 时，方程组无解；

3.5 向量组秩的¦法 方程组有解的判定

当 $b(1 \quad a) \neq 0$，即$b \neq 0 \ldots a \neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a = 1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A) = 2$，而此时若$b \neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A}) = 3$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a = 1 \ldots b = 1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A) = r(\overline{A}) = 2$ 小于未知量个数，所以方程组有无¡多解；

所以当$b \neq 0 \ldots a \neq 1$时，方程组有唯一解；

当$b = 0$时，或$a = 1 \ldots b \neq 1$ 时，方程组无解；

当$a = 1 \ldots b = 1$时，方程组有无¡多解.

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com