

线 代数

1 三章：向量空间

习 K 解 答

宿州 院 数 与 计 院



目录

1 习 K 3.6



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解 (1)齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解 (1)齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

é 系数矩阵 A 实施初 变换, 化为规范阶 F .

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解 (1)齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初 变换, 化为规范阶F .

$$A \xrightarrow{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

规范阶F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解 (1) 齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵 A 实施初 变换, 化为规范阶 F .

$$A \xrightarrow[\text{规范阶 } F]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{齐次线 方程组 } 0 \text{ 解于 } \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

自由未知量为 x_3, x_4 ,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)自由未知量为 x_3, x_4 ,取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)自由未知量为 x_3, x_4 ,取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{解集为} \left\{ k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 齐次线 方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换, 化为规范形 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范形 F .

初等变换
 $A \longrightarrow$
 规范形 F

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 齐次线 方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

é 系数矩阵 A 实施初 变换, 化为规范阶 F .

初 变换
 $A \longrightarrow$
 规范阶 F

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 齐次线 方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

é 系数矩阵 A 实施初 变换, 化为规范阶 F .

初 变换
 $A \longrightarrow$
 规范阶 F

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

自由未知量为 x_3, x_4, x_5 ,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{取 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{基础解系}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{取 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{基础解系}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{解集为}$$

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2, k_3 \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换, 化为规范阶梯形 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范形 F .

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

规范形 F







习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{解集为} \left\{ k_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范阶梯形 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范形 F .

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范形 F .

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

齐次线性方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换, 化为规范形 F .

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

齐次线性方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

自由未知量为 x_4 ,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

取 $x_4 = 1$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)取 $x_4 = 1$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{解集为} \left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1 \text{是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(5) 齐次线 方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(5) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换, 化为规范阶梯 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(5) 齐次线性方程组 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

对系数矩阵 A 实施初等变换，化为规范阶梯 F .

初等变换
 $A \longrightarrow$
 规范阶梯 F

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{齐次线性方程组 } \mathbf{0} \text{ 解于 } \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

齐次线性方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$ 自由未知量为 x_4 ,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{齐次线性方程组 } \mathbf{O} \text{ 解于 } \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases} \quad \text{自由未知量为 } x_4,$$

$$\text{取 } x_4 = 1, \quad \text{基础解系}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

齐次线性方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$ 自由未知量为 x_4 ,

取 $x_4 = 1$, 基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$

解集为 $\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1 \text{ 是任意数} \right\}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(6) 齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(6) 齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵 A 实施初 变换，化为规范阶 F .

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(6) 齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵 A 实施初 变换, 化为规范阶 F .

$$A \xrightarrow{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

规范阶 F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(6) 齐次线 方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

é 系数矩阵 A 实施初

程

2 8 . 3 4 6 1 3 2 . 1 5 2 c



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

自由未知量为 x_2, x_3, x_4, x_5



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)自由未知量为 x_2, x_3, x_4, x_5

$$\text{取 } \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{基础解系}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

2.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

2.解 (1)线 方程组 增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

2.解 (1)线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范
阶 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

2.解 (1)线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

对增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ \bar{A} \longrightarrow \\ \text{规范阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

2.解 (1)线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有一个自由未知量 x_3 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有一个自由未知量 x_3 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k_1 \text{ 是任意数} \right\}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 线 方程组 增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 线性方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

对增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初等变换，化为阶梯形 F ，进而化为规范阶梯形 F 。



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ \bar{A} \longrightarrow \\ \text{规范阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(2) 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范阶 F .

初 变换 $\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

规范阶 F

线 方程组 出齐次线 方程组分别 ó 解于

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = -2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$





习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有自由未知量 x_3, x_4 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$.

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 线 方程组 增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换，化为阶 F ，进而化为规范
阶 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

对增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ \bar{A} \longrightarrow \\ \text{规范阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(3) 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

é 增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初 变换, 化为阶 F , 进而化为规范阶 F .

初 变换 $\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

规范阶 F

线 方程组 出齐次线 方程组分别 ó 解于

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = -2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$





习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有自由未知量 x_3, x_4 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有自由未知量 x_3, x_4 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$.

注: (2) (3)两 K 中 方程组是 0 解方程组.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

(4) 方程组 0 解于 $x_1 = 4 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 6x_5$

出齐次线 方程组为 $x_1 = 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 6x_5$

有自由未知量 x_2, x_3, x_4, x_5 , 有一个 A 解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

出组 基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$

3.证明



习 K3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$

3.证明 (1) 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 基础解系,

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$

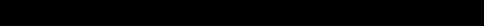
3. 证明 (1) 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 基础解系,所以 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关,

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$

3. 证明 (1) 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 基础解系,所以 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关, 且 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 任意组合 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 仍是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}$$

3. 证明 (1) 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 基础解系,所以 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关, 且 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 任意组合 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 仍是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解.(1) 假设 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 相关, 而已知 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关, 所以 η^* 可以由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 表

出.

习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使
 $\eta^* = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r}$ 成立,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使

$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 成立, 所以 η^* 是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 解,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使

$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 成立, 所以 η^* 是齐次线 方程
组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解, 这与 η^* 是非齐次线 方程
组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 解矛盾.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使

$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 成立, 所以 η^* 是齐次线 方程
组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解, 这与 η^* 是非齐次线 方程
组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 解矛盾.

所以 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关.





习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使

$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 成立, 所以 η^* 是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解, 这与 η^* 是非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 解矛盾.

所以 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) 假设 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性相关, 则存在不全为 0 的系数 $k, k_1, \dots, k_{n-r}$, 使

$k\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \dots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$ 成立. 即
 $(k + k_1 + \dots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ 成立.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

即, 存在系数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使

$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 成立, 所以 η^* 是齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 解, 这与 η^* 是非齐次线 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 解矛盾.

所以 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关.

(2) 假设 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线 相关, 则存在不全为 0 系数 $k, k_1, \dots, k_{n-r}$, 使

$k\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \dots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$ 成立. 即 $(k + k_1 + \dots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ 成立.

若 $k + k_1 + \dots + k_{n-r} \neq 0$, 则由

$(k + k_1 + \dots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ 知, η^* 可以由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 表出, η^* 是齐次线 方程组 解, 矛盾.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0,$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线 无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线 无关.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量的列向量,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s)$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s = k_1\beta + k_2\beta + \cdots + k_s\beta$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量 矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s = k_1\beta + k_2\beta + \cdots + k_s\beta = (k_1 + k_2 + \cdots + k_s)\beta$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s = k_1\beta + k_2\beta + \cdots + k_s\beta = (k_1 + k_2 + \cdots + k_s)\beta = \beta$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以 $k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 从而

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 进而有 $k = 0$,

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

4. 证明 记 A 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵, X 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为分量 的列向量, 则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 可以表示为 $AX = \beta$.

因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的 s 个解, 所以 $A\eta_i = \beta, i = 1, 2, \dots, s$. 所以

$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s = k_1\beta + k_2\beta + \cdots + k_s\beta = (k_1 + k_2 + \cdots + k_s)\beta = \beta$.

所以 x 是原方程组的解.





习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

5.解 由于 A 秩为2, 且 A 是 2×3 矩阵,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

5.解 由于 A 秩为2, 且 A 是 2×3 矩阵, 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 基础解系中, 含有一个解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

5.解 由于 A 秩为2, 且 A 是 2×3 矩阵, 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 基础解系中, 含有一个解.

又因为非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解 α_1, α_2 ,



$$\text{習 K 3.6}(P_{122} - P_{124})$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

5.解 由于 A 秩为2, 且 A 是 2×3 矩阵, 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 基础解系中, 含有一个解.

又因为非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解 α_1, α_2 , 所以

$$2\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

5.解 由于 A 秩为 2, 且 A 是 2×3 矩阵, 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 基础解系中, 含有一个解.

又因为非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解 α_1, α_2 , 所以

$2\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 解, 也是 $AX = 0$ 基础解系.





习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6. 解 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6.解 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线 无关, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 所以 A
 秩为3, 且 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6.解 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线 无关, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 所以 A

秩为3, 且 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 解.也是
 $AX = 0$ 基础解系.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6. 解 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 所以 A

秩为 3, 且 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解. 也是

$AX = 0$ 的基础解系.

又因为 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 所以 $AX = \beta$ 有解

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

6.解 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线 无关, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 所以 A

秩为3, 且 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 解.也是

$AX = 0$ 基础解系.

又因为 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 所以 $AX = \beta$ 有解

$\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 也是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$ 解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$

7.证明



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$

7. 证明 (1) 设为 η_1, η_2, η_3 是线 方程组 3 个线 无关 解,
 则 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 两个线 无关 解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$

7. 证明 (1) 设为 η_1, η_2, η_3 是线 方程组 3 个线 无关 解, 则 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 两个线 无关 解. 而齐次线 方程组 $AX = 0$ 基础解系含有 $4 - r(A)$ 个线 无关 解, 所以 $4 - r(A) \geq 2, r(A) \leq 2.$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$

7. 证明 (1) 设为 η_1, η_2, η_3 是线 方程组 3 个线 无关 解, 则 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 两个线 无关 解. 而齐次线 方程组 $AX = 0$ 基础解系含有 $4 - r(A)$ 个线 无关 解, 所以 $4 - r(A) \geq 2, r(A) \leq 2.$

又因为方程 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以要求 解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}.$

7. 证明 (1) 设为 η_1, η_2, η_3 是线 方程组 3 个线 无关 解, 则 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是齐次线 方程组 $AX = 0$ 两个线 无关 解. 而齐次线 方程组 $AX = 0$ 基础解系含有 $4 - r(A)$ 个线 无关 解, 所以 $4 - r(A) \geq 2, r(A) \leq 2.$

又因为方程 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b \end{pmatrix}$

对 A 实施初 变换, 化为阶 F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元, 即, A 秩至少是 2, $r(A) \geq 2$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元, 即, A 秩至少是 2, $r(A) \geq 2$.

所以 $r(A) = 2$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元, 即, A 秩至少是 2, $r(A) \geq 2$.

所以 $r(A) = 2$.

(2)解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ A \longrightarrow \\ \text{阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元, 即, A 秩至少是 2, $r(A) \geq 2$.

所以 $r(A) = 2$.

(2) 解 线 方程组 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix},$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即， A 秩至少是 2， $r(A) \geq 2$.

所以 $r(A) = 2$.

(2)



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即， A 秩至少是 2， $r(A) \geq 2$.

所以 $r(A) = 2$.

(2)



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

进而将 $\overline{A}$ 化为规范阶 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

进而将 $\bar{A}$ 化为规范阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ \bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{规范阶 F} \end{array}$$

线 方程组 出齐次线 方程组分别 0 解于

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -3 + x_3 - 5x_4 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

有一个 A 解, 出组有基础解系分别是

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.

8.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.

8.解 因为 A 1— 非零, 所以 A 秩 $r(A) \geq 1$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.

8.解 因为 A 1-非零, 所以 A 秩 $r(A) \geq 1$.

对矩阵 B 进行初等变换, 化为阶 F .

$$B \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k-9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶 F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.

8.解 因为 A 1 一 非零, 所以 A 秩 $r(A) \geq 1$.

é 矩阵 B 进 初 变换, 化为阶 F .

$$B \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k-9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $k \neq 9$, B 1 一 列和 1 三列线 无关,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$$\text{解集为 } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}$$

习 K 8.更正：其中 $k \neq 9$ 是常数.

8.解 因为 A 1-非零, 所以 A 秩 $r(A) \geq 1$.

对矩阵 B 进行初等变换, 化为阶 F .

$$B \xrightarrow[\text{阶 } F]{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k-9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $k \neq 9$, B 1-列和 1-三列线性无关, 而 $AB = 0$, 矩阵 B 列向量是 $AX = 0$ 解向量.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

又因为 $r(A) \geq 1$,

矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的三列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

又因为 $r(A) \geq 1$,

矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的三列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系.

所以 $AX = 0$ 的通解为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \text{ 是任意数} \right\}.$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

9.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

9. 解方程组 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{各加 } 1-} \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} + a & \frac{n(n+1)}{2} + a & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} + a & \frac{n(n+1)}{2} + a \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$, 将 A 进一步化为阶 F .

$$A \xrightarrow[\text{阶 } F]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$, 将 A 进一步化为阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ A \longrightarrow \\ \text{阶 } F \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

若 $a \neq 0$, A 有 n 个主元, 矩阵 A 秩 $r(A) = n$, 方程组只有零解;



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$, 将 A 进一步化为阶 F .

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ A \longrightarrow \\ \text{阶 } F \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

若 $a \neq 0$, A 有 n 个主元, 矩阵 A 秩 $r(A) = n$, 方程组只有零解;

若 $a = 0$, 则方程组有解于 $x_1 = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

解集为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_i \text{ 是任意数} \right\}.$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$, A 可以化为



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$, A 可以化为

$$A \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 - \frac{n+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

若 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$, A 可以化为

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ A \longrightarrow \\ \text{阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 - \frac{n+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{初 变换} \\ \longrightarrow \\ \text{规范阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有一个自由未知量，基础解系为 $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \\ 1 \end{pmatrix},$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有一个自由未知量，基础解系为 $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{解集为} \left\{ k \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10.解



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10. 解 (1) 因为 $A\xi_2 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10. 解 (1) 因为 $A\xi_2 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\bar{A}$ 进行初等变换，化为规范阶梯形 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10. 解 (1) 因为 $A\xi_2 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\overline{A}$ 进行初等变换，化为规范形 F .

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

规范形 F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10. 解 (1) 因为 $A\xi_2 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\bar{A}$ 进行初等变换, 化为规范形 F

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组 出齐次线性方程组解于

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

10. 解 (1) 因为 $A\xi_2 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\bar{A}$ 进行初等变换, 化为规范形 F

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组 出齐次线 方程 0 解于

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

方程组有 A 解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 出组基础解系为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以,满足 $A\xi_2 = \xi_1$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, k 是任意数.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以,满足 $A\xi_2 = \xi_1$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, k 是任意数.

因为 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $A^2\xi_3 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以,满足 $A\xi_2 = \xi_1$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, k 是任意数.

因为 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $A^2\xi_3 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\overline{B}$ 进行初等变换, 化为规范阶 F .



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以,满足 $A\xi_2 = \xi_1$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, k 是任意数.

因为 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $A^2\xi_3 = \xi_1$ 增广矩阵

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

对 $\overline{B}$ 进行初等变换, 化为规范形 F .

$$\overline{B} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

规范形 F



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 出方程组分别 解于

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + 0x_3, \quad x_1 = -x_2 + 0x_3$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 出方程组分别 0 解于

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + 0x_3, \quad x_1 = -x_2 + 0x_3$$

有 A 解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 出组基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 出方程组分别 0 解于

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + 0x_3, \quad x_1 = -x_2 + 0x_3$$

有 A 解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 出组基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以满足 $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 是任意数.}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 出方程组分别 0 解于

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + 0x_3, \quad x_1 = -x_2 + 0x_3$$

有 A 解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 出组基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以满足 $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 是任意数.}$$

(2)证明



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组 出方程组分别 0 解于

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + 0x_3, \quad x_1 = -x_2 + 0x_3$$

有 A 解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 出组基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以满足 $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 是任意数.}$$

(2) 证明 é 任意 $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+k) \\ -\frac{1}{2}(1+k) \\ k \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k_1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ C \longrightarrow \\ \text{阶 F} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ 0 & -1 & -1 + k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ 0 & -1 & -1 + k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{阶 F} \end{array}$$

C 有三个主元, 所以 C 秩为3, 列向量线 无关,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ 0 & -1 & -1 + k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C 有三个主元, 所以 C 秩为3, 列向量线 无关,
即 ξ_2, ξ_3 任意, ξ_1 有 ξ_2, ξ_3 线 无关.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ 0 & -1 & -1 + k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C 有三个主元, 所以 C 秩为3, 列向量线 无关,
即 ϵ 任意 ξ_2, ξ_3 , $\tilde{N}$ 有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线 无关.

11.解



以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶 F}]{\text{初 变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C 有三个主元, 所以 C 秩为3, 列向量线性无关,

即 ϵ 任意 $\xi_2, \xi_3, \tilde{N}$ 有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线 无关.

11. 解 (1) 因为存在非0矩阵 B , 使 $AB = 0$, 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为列构造矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2} - k_1 \\ 0 & -1 & -1 + k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{阶 F} \end{array}$$

C 有三个主元, 所以 C 秩为3, 列向量线 无关,
即 ϵ 任意 ξ_2, ξ_3 , $\tilde{N}$ 有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线 无关.

11.解 (1)因为存在非0矩阵 B , 使 $AB = 0$, 所以齐次线
方程组 $AX = 0$ 有非零解.

$$\begin{array}{l} \text{初} \quad \text{变换} \\ A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \\ \text{阶 F} \end{array}$$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < \quad$ 且

124



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.

(2) $a = 0$ 时, 方程组 0 解于
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.

(2) $a = 0$ 时, 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$.



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.

(2) $a = 0$ 时, 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \right\}$



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.

(2) $a = 0$ 时, 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \text{ 是任意数} \right\}$.

$a = 2$ 时, 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,



习 K 3.6($P_{122} - P_{124}$)

$AX = 0$ 有非零解 且仅 A 秩 $r(A) < 3$, 所以, 若存在非零矩阵 B , 使 $AB = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $a = 2$.

(2) $a = 0$ 时, 方程组 0 解于 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\left\{ k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \right\}$



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

