

线性代数

第三章：向量空间

宿州学院 数学 统计学院



目录

1 3.4 向量组的秩



3.4 向量组的秩

已知结论：

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部 组线性相关，则整体线性相关；



3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部 组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部 组都线性无关.



3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部分组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部分组都线性无关.

本节探讨向量组的部分组和整体的线性相关性问题.



3.4 向量组的秩

已知结论:

向量组若存在部 组线性相关, 则整体线性相关; 若整体线性无关, 则其任意部 组都线性无关.

本节探讨向量组的部 组和整体的线性相关性问题.

例如,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是 R^3 中的4个向量组成的向量组.



3.4 向量组的秩

已知结论：

3.4 向量组的秩

已知结论：

3.4 向量组的秩

已知结论：

3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部 组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部 组都线性无关。

本节探讨向量组的部 组和整体的线性相关性问题。

例如，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是 R^3 中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部 组 α_1, α_2 ; α_1, α_3 ; α_2, α_4 ; α_3, α_4 都是线性无关的，其任意三个向量组成的部 组都是线性相关的。



3.4 向量组的秩

已知结论：

向量组若存在部 组线性相关，则整体线性相关；若整体线性无关，则其任意部 组都线性无关。

本节探讨向量组的部 组和整体的线性相关性问题。

例如，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是 R^3 中的4个向量组成的向量组.直接验证知，其两个向量构成的部 组 α_1, α_2 ; α_1, α_3 ; α_2, α_4 ; α_3, α_4 都是线性无关的，其任意三个向量组成的部 组都是线性相关的。

也就是说，其线性无关的部 组中，所含向量个数最多是2.



3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部 组中所含向量个数最多是2的含义
是：



3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部 组中所含向量个数最多是2的含义
是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部 组，且在此部
组中再任意添加一个向量就线性相关了.



3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部分组中所含向量个数最多是2的含义是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部分组，且在此部分组中再任意添加一个向量就线性相关了。

含向量个数最多的线性无关的部分组称为向量组的极大线性无关组。



3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部 组中所含向量个数最多是2的含义
是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部 组，且在此部
组中再任意添加一个向量就线性相关了。

含向量个数最多的线性无关的部 组称为向量组的极大线性
无关组。

问题是：给定向量组的极大线性无关组之间会 什么关系？



3.4 向量组的秩

所谓线性无关的部 组中所含向量个数最多是2的含义
是：向量组中存在含两个向量的线性无关的部 组，且在此部
组中再任意添加一个向量就线性相关了。

含向量个数最多的线性无关的部 组称为向量组的极大线性
无关组。

问题是：给定向量组的极大线性无关组之间会 什么关系？
先给出极大线性无关组的定义。



3.4 向量组的秩

定义3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中 m 个向量组成的向量组, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其 r 个向量构成的部 组,



3.4 向量组的秩

定义3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中 m 个向量组成的向量组, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其 r 个向量构成的部 组, 若满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;



3.4 向量组的秩

定义3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中 m 个向量组成的向量组, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其 r 个向量构成的部 组, 若满足:

- (1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ **线性无关**;
- (2) 任取 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 以外的向量 α_k (若还存在的话), 都**线性相关**.



3.4 向量组的秩

定义3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中 m 个向量组成的向量组, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其 r 个向量构成的部 组, 若满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ **线性无关**;

(2) 任取 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 以外的向量 α_k (若还存在的话), 都
 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_k$ **线性相关**.

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个极大线性无关组.



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其部 组 α_1, α_2 满足

(1) α_1, α_2 线性无关；



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其部 组 α_1, α_2 满足

- (1) α_1, α_2 线性无关；
- (2) 取 α_1, α_2 以外的向量 α_3 ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其部 组 α_1, α_2 满足

(1) α_1, α_2 线性无关；

(2)取 α_1, α_2 以外的向量 α_3 , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；

取 α_1, α_2 以外的向量 α_4 , 也 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关.



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其部 组 α_1, α_2 满足

(1) α_1, α_2 线性无关；

(2)取 α_1, α_2 以外的向量 α_3 , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；

取 α_1, α_2 以外的向量 α_4 , 也 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关.

即，任取 α_1, α_2 以外的向量 $\alpha_k, (k = 3, 4)$ ，都 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k$ 线性相关.



3.4 向量组的秩

例如，向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其部 组 α_1, α_2 满足

(1) α_1, α_2 线性无关；

(2) 取 α_1, α_2 以外的向量 α_3 ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；

取 α_1, α_2 以外的向量 α_4 ，也 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关。

即，任取 α_1, α_2 以外的向量 α_k ，($k = 3, 4$)，都 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k$ 线性相关。

所以 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组。

3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 α_1, α_3 ;



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4;$



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.
那么，它们之间存在什么关系？



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组 其极大线性无关组之间的关系.



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组 其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中给定的向量组，
 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量 α_k ，都
 α_k 可以被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组 其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中给定的向量组，
 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量 α_k ，都
 α_k 可以被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.

理 是：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.



3.4 向量组的秩

同样验证得：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的部分组 $\alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

例子也说明：同一向量组的极大线性无关组不唯一.

那么，它们之间存在什么关系？

首先来看给定向量组其极大线性无关组之间的关系.

定理3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 F^n 中给定的向量组， $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其一个极大线性无关组，则对任意向量 α_k ，都 α_k 可以被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 唯一的线性表出.

理 是：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

定理3.2的证明，可以自己尝试.



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是：



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是： F^n 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量 α_k 都可以 它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是： F^n 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量 α_k 都可以 它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出.

对极大无关组 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 中的每一个向量 α_{j_l} ,



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是： F^n 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量 α_k 都可以 它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量 α_{i_l} , 都

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是： F^n 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量 α_k 都可以 它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量 α_{i_l} , 都

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$

即 α_{i_l} 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.



3.4 向量组的秩

定理3.2的结论是： F^n 中任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量 α_k 都可以 它自身的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.

对极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 中的每一个向量 α_{i_l} , 都

$$\alpha_{i_l} = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i_l-1} + 1\alpha_{i_l} + 0\alpha_{i_l+1} + \cdots + 0\alpha_m,$$

即 α_{i_l} 可以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

针对一个向量组中的每一个向量都可以被另一个向量组线性表出的这种关系, 引入如下定义



3.4 向量组的秩

定义3.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组,



3.4 向量组的秩

定义3.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则称**向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出**.



3.4 向量组的秩

定义3.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则称**向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出**.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则称**它们是等价的**.



3.4



3.4 向量组的秩

定义3.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则称**向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出**.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则称**它们是等价的**.

利 定义3.4, 定理3.2可以叙述为:

在 F^n 中, 向量组 其极大线性无关组是等价的.

向量组的线性表出和等价是两个向量组之间的一种关系.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

- (1) 身性. 即任何向量组都可以 其自身线性表出.
- (2) 传递性.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性. 即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2) 传递性. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出,



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性. 即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2) 传递性. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出,



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性. $\square$



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性. 即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2) 传递性. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) 身性.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都 其自身等价.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都 其自身等价.

(2)**对称性**.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都 其自身等价.

(2)**对称性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价,



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)传递性.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) 身性.即任何向量组都 其自身等价.

(2)对称性.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) 身性. 即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2) 传递性. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) 身性. 即任何向量组都 其自身等价.

(2) 对称性. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.

(3) 传递性.



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都 其自身等价.

(2)**对称性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.

(3)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价,



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都可以 其自身线性表出.

(2)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具 以下性质

(1) **身性**.即任何向量组都 其自身等价.

(2)**对称性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.

(3)**传递性**.向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 等价,



3.4 向量组的秩

且向量组的线性表出具有以下性质

(1) **身性**. 即任何向量组都可以由其自身线性表出.

(2) **传递性**. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 线性表出.

向量组的等价关系具有以下性质

(1) **身性**. 即任何向量组都可以由其自身等价.

(2) **对称性**. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.

(3) **传递性**. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 等价, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 等价.



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以

推论3.1



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的， 向量组的等价关系 具 对称性 传递性，所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系, 还需要如下定理



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系, 还需要如下定理

定理3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 且满足:



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系, 还需要如下定理

定理3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 且满足:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出;

(2) $s > t$;



3.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组都 向量组自身是等价的, 向量组的等价关系 具 对称性 传递性, 所以

推论3.1 同一个向量组的两个极大线性无关组之间是等价的.

为了给出两个等价的线性无关的向量组之间的关系, 还需要如下定理

定理3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 F^n 中的两个向量组, 且满足:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出;

(2) $s > t$;

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出；



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出；
- 则 $s \leq t$.



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出；
- 则 $s \leq t$.

推论3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出；
- 则 $s \leq t$.

推论3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$ ，且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也线性无关；
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价；



3.4 向量组的秩

定理3.3给出了一个很 意思的结论：在向量空间 F^n 中，若含向量个数多的向量组可以被含向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组一定线性相关.

定理的逆 命题是：

推论3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$, 且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出；
- 则 $s \leq t$.

推论3.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in F^n$, 且满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也线性无关；
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价；
- 则 $s = t$.



3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.



3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以



3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4



3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在 F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.



3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在 F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

定理3.4是说，在 F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数是 向量组所确定的.





3.4 向量组的秩

推论3.3是说，两个等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等.

，同一个向量组的极大线性无关组之间是等价的(推论3.1)，所以

定理3.4 在 F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等.

定理3.4是说，在 F^n 中，同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数是 向量组所确定的.

定义3.5 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 F^n 中的向量组.称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含的向量个数 r 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩.记作 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$.



3.4



3.4 向量

组的秩

定义3.5的基础是定理3.4, 定理3.4 是在定理3.3的基础上获得的, 所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础. 下面给出定理3.3的证明



3.4 向量

组的秩

定义3.5的基础是定理3.4, 定理3.4 是在定理3.3的基础上获得的, 所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础. 下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 就是要找不全为零的系数 $x_1, x_2, \dots, x_s$, 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.



3.4 向量

组的秩

定义3.5的基础是定理3.4, 定理3.4 是在定理3.3的基础上获得的, 所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础. 下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 就是要找不全为零的系数 $x_1, x_2, \dots, x_s$, 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出,



3.4 向量

组的秩

定义3.5的基础是定理3.4, 定理3.4 是在定理3.3的基础上获得的, 所以定理3.3 是向量组的秩概念的基础. 下面给出定理3.3的证明

定理3.3的证明

要证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 就是要找不全为零的系数 $x_1, x_2, \dots, x_s$, 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 所以对任意 α_k ($k = 1, 2, \dots, s$)都存在系数 $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{tk}$, 使得 $\alpha_k = a_{1k}\beta_1 + a_{2k}\beta_2 + \dots + a_{tk}\beta_t$,



3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$



3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s =$$



3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = & x_1(a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t) \\ & + x_2(a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t) \\ & + \cdots \\ & + x_s(a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t) \end{aligned}$$



3.4 向量组的秩

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t \\ \vdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s &= x_1(a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t) \\ &\quad + x_2(a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + x_s(a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s)\beta_1 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s)\beta_2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s)\beta_t \end{aligned}$$

3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 也使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.



3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 也使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

程组的 程个数为 t ，小 未知量个数 s ，所以 程组
零解.



3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的 x



3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的 x



3.4 向量组的秩

取

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{ts}x_s = 0 \end{cases}$$

则满足上式的 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 也使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

程组的 程个数为 t , 小 未知量个数 s , 所以 程组
零解.

即存在不全为零的数 $x_1, x_2, \dots, x_s$, 使得 程组中的每一个
等式都成立, 从 也使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立.

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关的命题.



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关系的命题.

定理3.5



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关系的命题.

定理3.5 等价向量组 相同的秩.



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关系的命题.

定理3.5 等价向量组 相同的秩.

这是因为:

每个向量组的极大线性无关组 向量组自身等价, 等价具传递性, 所以等价向量组的极大线性无关组也等价



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关的命题.

定理3.5 等价向量组 相同的秩.

这是因为:

每个向量组的极大线性无关组 向量组自身等价, 等价具传递性, 所以等价向量组的极大线性无关组也等价 再, 等价的线性无关的向量组 相同的向量个数, 所以, 等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关的命题.

定理3.5 等价向量组 相同的秩.

这是因为:

每个向量组的极大线性无关组 向量组自身等价, 等价具传递性, 所以等价向量组的极大线性无关组也等价 再, 等价的线性无关的向量组 相同的向量个数, 所以, 等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等 所以, 它们 相同的秩



3.4 向量组的秩

再给出一些 向量组秩 关的命题.

定理3.5 等价向量组 相同的秩.

这是因为:

每个向量组的极大线性无关组 向量组自身等价, 等价具传递性, 所以等价向量组的极大线性无关组也等价 再, 等价的线性无关的向量组 相同的向量个数, 所以, 等价向量组的极大线性无关组所含的向量个数也相等 所以, 它们 相同的秩

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$.



3.4 向量组的秩

定理3.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 F^n 中秩为 r 的向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量构成的部 组都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.



3.4 向量组的秩

定理3.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 F^n 中秩为 r 的向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量构成的部 组都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.

定理3.7 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 是 F^n 中的 $m+1$ 个向量, 则向量 β 可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 相同的秩.

向量 β 可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出是线性 程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$ 解的充要条件,

所以, **定理3.7**实际上给出了一般的线性 程组 解的充要条件的另一种表述 式.



3.4 向量组的秩

定理3.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 F^n 中秩为 r 的向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量构成的部 组都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.

定理3.7 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 是 F^n 中的 $m+1$ 个向量, 则向量 β 可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 相同的秩.

向量 β 可以 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出是线性 程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$ 解的充要条件,

所以, **定理3.7**实际上给出了一般的线性 程组 解的充要条件的另一种表述 式. 下一节将利 向量组的秩概念, 给出线性 程组 解的判定准则以及解的情况的判定



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

