

性代数

第四章：行列式

宿州学院 数学与统计学院



目录

1 4.2 n 阶行列式的计算



4.2 n 阶行列式的计算

例4.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.

4.2 n 阶行列式的计算

例4.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.

解



4.2 n 阶行列式的计算

例4.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.解 A 经过初等行变换可以化为上三角矩阵.

4.2 n 阶行列式的计算

例4.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求 $\det A$.解 A 经过初等行变换可以化为上三角矩阵.

将 A 的最后一行依次与上面 邻的行交换, 换到第一行,
 交换 $n-1$ 次, 得矩阵



4.2 n 阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & & & & & \\ \textcircled{a} & & & & & \end{vmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & 1 \\ \textcircled{\text{a}} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{array}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & 1 \\ & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ \begin{array}{c} \text{①} \\ \vdots \\ \text{①} \end{array} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{array}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以 $\det A = (-1)^{n-1} \det A_1$.



4.2 n 阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{array}{ccccc} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} & 1 \\ \text{⋮} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} & \text{⋮} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & A \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} & \end{array}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以 $\det A = (-1)^{n-1} \det A_1$.

将矩阵 A_1 的最后一行依次与上面相邻的行交换，换到第二行，交换 $n-2$ 次，得到矩阵 A_2 ，



4.2 n 阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & 1 \\ \textcircled{\text{a}} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{array}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以 $\det A = (-1)^{n-1} \det A_1$.

将矩阵 A_1 的最后一行依次与上面相邻的行交换，换到第二行，交换 $n-2$ 次，得到矩阵 A_2 ，再将矩阵 A_2 的最后一行依次与上面相邻的行交换，换到第三行，交换 $n-3$ 次，得到矩阵 A_3 ，...，重复上面的交换过程，经过



4.2 n 阶行列式的计算

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 1 & 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 1 & 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.

由**定理4.1**, 则

$$\det(AA^{-1}) =$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.

由**定理4.1**, 则

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} =$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.

由**定理4.1**, 则

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n =$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.

由**定理4.1**, 则

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n = 1:$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 是可逆矩阵, 则 $\det A \neq 0$,
且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为 A 可逆, 存在逆矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I_n$.

由**定理4.1**, 则

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n = 1:$$

所以 $\det A \neq 0$, 且 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则

$$\det A = \det A^t:$$



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**

对 A^t 实施初等行变换和对 A 实施 应的初等列变换是一致的, 即



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**

对 A^t 实施初等行变换和对 A 实施 应的初等列变换是一致的, 即

(1) 交换 A^t 的第 i 、 j 行, 就是交换 A 的第 i 、 j 列;



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**

对 A^t 实施初等行变换和对 A 实施 应的初等列变换是一致的, 即

- (1) 交换 A^t 的第 i 、 j 行, 就是交换 A 的第 i 、 j 列;
- (2) 将 A^t 的第 i 行乘非0 数 c , 就是将 A 的第 i 列乘非0数 c ;



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**

对 A^t 实施初等行变换和对 A 实施 应的初等列变换是一致的, 即

- (1) 交换 A^t 的第 i 、 j 行, 就是交换 A 的第 i 、 j 列;
- (2) 将 A^t 的第 i 行乘非0 数 c , 就是将 A 的第 i 列乘非0数 c ;
- (3) 将 A^t 的第 i 行乘数 c 加到第 j 行, 就是将 A 的第 i 列乘数 c 加到第 j 列.



4.2 n 阶行列式的计算

定理4.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det A = \det A^t:$$

即, **转置不改变行列式的值.**

对 A^t 实施初等行变换和对 A 实施 应的初等列变换是一致的, 即

- (1) 交换 A^t 的第 i 、 j 行, 就是交换 A 的第 i 、 j 列;
- (2) 将 A^t 的第 i 行乘非0 数 c , 就是将 A 的第 i 列乘非0数 c ;
- (3) 将 A^t 的第 i 行乘数 c 加到第 j 行, 就是将 A 的第 i 列乘数 c 加到第 j 列.

又, $\det A = \det A^t$, 所以行列式中对行成立的性质, 对列一样成立.



4.2 n 阶行列式的计算

称交换矩阵(行列式)的两列、将矩阵(行列式)的某一列乘非0数、将矩阵(行列式)的某一列乘数 k 加到另一列为矩阵(行列式)的初等列变换.



4.2 n 阶行列式的计算

称交换矩阵(行列式)的两列、将矩阵(行列式)的某一列乘非0数、将矩阵(行列式)的某一列乘数 k 加到另一列为矩阵(行列式)的初等列变换.

由**定理4.2**, 计算行列式时, 既可以进行初等行变换, 也可以进行初等列变换.



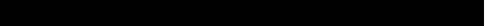
4.2

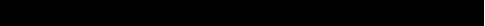


4.2 n 阶行列式的计算

解







4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1列, 行列式的值不变. 即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.



4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1 列, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1 列, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1 列, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1 列, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

解 将 A 的各列都加到第1 列, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

15 1 2 3 4

再将其第一行乘 (-1) 加到以 各行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

0 -1 -1 -1 -1

4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶

4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶

4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = - \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} =$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = (-15) \times (-5)^3 =$$



4.2 n 阶行列式的计算

再将其第二行乘 (-2) 加到第三行, 将第二行乘 (-3) 加到第四行, 将第二行加到第五行, 行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行, 行列式变号.即

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = (-15) \times (-5)^3 = 1875:$$



Thank you!

Author: Ning Qun

Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

Email: Ning.qun@163.com

