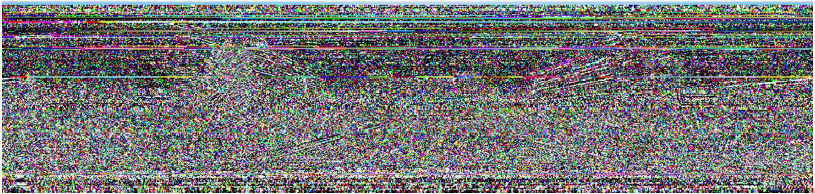
性代数

第四章：行列式

宿州学院　数学与统计学院



目录

4.2 n阶行列式的计算

例4.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

4.2 n阶行列式的计算

例4.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

解

4.2 n阶行列式的计算

例4.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

解 A 经过初等行变换可以化为上三角矩阵.

4.2 n阶行列式的计算

例4.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

解 A 经过初等行变换可以化为上三角矩阵.

将A 的最后一行依次与上面 邻的行交换，换到第一行，交换$n-1$ 次，得矩阵

4.2 n阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以$\det A = (-1)^{n-1} \det A_1$.

4.2 n阶行列式的计算

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以$\det A=(-1)^{n-1}\det A_1$.

将矩阵A_1 的最后一行依次与上面 邻的行交换，换到第二行，交换$n-2$ 次，得到矩阵A_2 ，

4.2 n阶行列式的计算

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

每一次交换都改变行列式的符号，所以$\det A = (-1)^{n-1} \det A_1$.

将矩阵A_1 的最后一行依次与上面 邻的行交换，换到第二行，交换$n-2$ 次，得到矩阵A_2 ，再将矩阵A_2 的最后一行依次与上面 邻的行交换，换到第三行，交换$n-3$ 次，得到矩阵A_3 ，...，重复上面的交换过程，经过

4.2 n阶行列式的计算

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n\ \ 1)}{2}$$

次　邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n\ \ 1}=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n\ \ 1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n\ \ 1)}{2}$$

次　邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n\ \ 1}=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n\ \ 1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n\ \ 1)2} & \cdots & a_{(n\ \ 1)(n\ \ 1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次 邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次　邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次　邻两行的交换，矩阵变成上三角矩阵

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A = (a_{ij})_{n \times n}; B = (b_{ij})_{n \times n}$，则

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，若A 是可逆矩阵，则$\det A \neq 0$，且

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A = (a_{ij})_{n\quad n}; B = (b_{ij})_{n\quad n}$，则

$$\det(AB) = \det A \det B:$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A = (a_{ij})_{n\quad n}$，若A 是可逆矩阵，则$\det A \neq 0$，且

$$\det(A^{\quad 1}) = \frac{1}{\det A}:$$

因为A可逆，存在逆矩阵$A^{\quad 1}$，使得$AA^{\quad 1} = I_n$.

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$; $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A是可逆矩阵，则$\det A\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

因为A可逆，存在逆矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1}=I_n$.

由定理4.1，则

$$\det(AA^{-1})=$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A 是可逆矩阵，则$\det A\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

因为A可逆，存在逆矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1}=I_n$.

由定理4.1，则

$$\det(AA^{-1})=\det A\det A^{-1}=$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A是可逆矩阵，则$\det A\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

因为A可逆，存在逆矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1}=I_n$.

由定理4.1，则

$$\det(AA^{-1})=\det A\det A^{-1}=\det I_n=$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A是可逆矩阵，则$\det A\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

因为A可逆，存在逆矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1}=I_n$.

由定理4.1，则

$$\det(AA^{-1})=\det A\det A^{-1}=\det I_n=1.$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}; B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

即矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

推论4.1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A 是可逆矩阵，则$\det A\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

因为A可逆，存在逆矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1}=I_n$.

由定理4.1，则

$$\det(AA^{-1})=\det A\det A^{-1}=\det I_n=1.$$

所以$\det A\neq 0$，且$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$.

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A = (a_{ij})_{n \quad n}$，则

$$\det A = \det A^t:$$

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A = (a_{ij})_{n \times n}$，则

$$\det A = \det A^t.$$

即，转置不改变行列式的值.

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A=(a_{ij})_{n\quad n}$，则

$$\det A=\det A^{t}.$$

即，转置不改变行列式的值.

对A^{t} 实施初等行变换和对A 实施　应的初等列变换是一致的，即

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A=(a_{ij})_{n\quad n}$，则

$$\det A=\det A^t:$$

即，转置不改变行列式的值.

对A^t 实施初等行变换和对A 实施 应的初等列变换是一致的，即

(1)交换A^t 的第i、j 行，就是交换A 的第i 、j 列；

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A=(a_{ij})_{n\ \ n}$，则

$$\det A=\det A^t.$$

即，转置不改变行列式的值.

对A^t 实施初等行变换和对A 实施　应的初等列变换是一致的，即

(1)交换A^t 的第i、j 行，就是交换A 的第i 、j 列；

(2)将A^t 的第i 行乘非0 数c ，就是将A 的第i 列乘非0数c ；

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A=(a_{ij})_{n\ \ n}$，则

$$\det A=\det A^t.$$

即，转置不改变行列式的值.

对A^t 实施初等行变换和对A 实施 应的初等列变换是一致的，即

(1)交换A^t 的第i、j 行，就是交换A 的第i 、j 列；

(2)将A^t 的第i 行乘非0 数c ，就是将A 的第i 列乘非0数c ；

(3)将A^t 的第i 行乘数c 加到第j 行，就是将A的第i 列乘数c 加到第j 列.

4.2 n阶行列式的计算

定理4.2 设$A=(a_{ij})_{n\quad n}$，则

$$\det A=\det A^t.$$

即，转置不改变行列式的值.

对A^t 实施初等行变换和对A 实施 应的初等列变换是一致的，即

(1)交换A^t 的第i、j 行，就是交换A 的第i 、j 列；

(2)将A^t 的第i 行乘非0 数c ，就是将A 的第i 列乘非0数c ；

(3)将A^t 的第i 行乘数c 加到第j 行，就是将A的第i 列乘数c 加到第j 列.

又，$\det A=\det A^t$，所以行列式中对行成立的性质，对列一样成立.

4.2 n阶行列式的计算

称交换矩阵(行列式)的两列、将矩阵(行列式)的某一列乘非0数、将矩阵(行列式)的某一列乘数k 加到另一列为矩阵(行列式)的初等列变换.

4.2 n阶行列式的计算

称交换矩阵(行列式)的两列、将矩阵(行列式)的某一列乘非0数、将矩阵(行列式)的某一列乘数k 加到另一列为矩阵(行列式)的初等列变换.

由定理4.2，计算行列式时，既可以进行初等行变换，也可以进行初等列变换.

4.2

4.2 n阶行列式的计算

解

4.2 n阶行列式的计算

解 将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以 各行，行列式的值不变.

4.2 n阶行列式的计算

解 将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以 各行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

解　将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以　各行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

解　将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以　各行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

解　将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以　各行，行列式的值不变.即

$$\det A=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&2&2&-3&-3\\0&3&-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

解　将A 的各列都加到第1 列，行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

再将其第一行乘(-1) 加到以　各行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&2&2&-3&-3\\0&3&-2&-2&-2\\0&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&0&0&-5&5\\0&0&-5&-5&10\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A=-\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A=\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A=-\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}=$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&2&2&-3&-3\\0&3&-2&-2&-2\\0&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&0&0&-5&5\\0&0&-5&-5&10\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A=-\det\begin{pmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&0&-5&-5&10\\0&0&0&-5&5\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}=(-15)\times(-5)^3=$$

4.2 n阶行列式的计算

再将其第二行乘(-2) 加到第三行，将第二行乘(-3)加到第四行，将第二行加到第五行，行列式的值不变.即

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

交换它的第三行与第四行，行列式变号.即

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = (-15)\times(-5)^3 = 1875.$$

Thank you!

Author: Ning Qun
Address: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
Email: Ning.qun@163.com